

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРГОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

**FarDU.
ILMIY
XABARLAR-**

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

1-2018
февраль

**НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ**

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

А.ҮРИНОВ, М.РАХИМОВА

Иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенглама учун аралаш чегаравий масала 5

А.МАДРАХИМОВ, С.КУКИЕВА

Математик статистиканинг таҳлил қилиш усулининг бир масалага татбиғи 9

З.СИДДИҚОВ

Математик моделлаштириш кўникмасини шакллантириш асосида талабаларни қасбга йўналтириш 12

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

Ш.ЯКУБОВА, Н.НОСИРОВ, О.ТЎЛАНОВ

Газларнинг молекуляр-кинетик назариясининг асосий тенгламаси 17

З.ХУСАНОВ, Б.ОМОНОВ

Умумий ўрта таълим мактабларида “Ой - Ернинг табиий йўлдоши” мавзусини ўқитиша интерфаол методлардан фойдаланиш 20

КИМЁ

М.АХМАДАЛИЕВ

Дифурбурилиденациетон-ДИФА ҳосил бўлиш реакцияси 23

БИОЛОГИЯ, ҚИШЛОҚ ҲЎЖАЛИГИ

Ё.ҚАЮМОВА, Д.КОМИЛОВА, Б.БАХРОМОВА

Қўлоғирлик сезгисининг турли ёшдаги болаларда ривожланишининг психофизиологик хусусиятлари 28

ГЕОГРАФИЯ, ТУПРОҚШУНОСЛИК

Р.ПИРНАЗАРОВ

Қурбонкўлнинг пайдо бўлиши ва кўл ҳавзасининг табиий шароити 31

У.МИРЗАЕВ

Исфайрам-Шоҳимардонсои конус ёйилмалари тупроқлари шўрланиш ва шўрсизланишининг умумий қонуниятлари 34

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ИҚТИСОДИЁТ

А.ЭРГАШЕВ

Реал сектор корхоналарини инновацион ривожланишининг асосий йўналишлари 39

ТАРИХ

С.ШАДМАНОВА

XIX асрнинг охири – XX аср бошларида Тошкент шаҳрининг санитар аҳволи ва муаммолари 43

Б.УСМОНОВ

Одилшоҳ Жалойир исёни: сабаб, жараён ва оқибат 47

ФАЛСАФА, СИЁСАТ

Т.АБДУЛЛАЕВ

Фанлар интеграциялашувида фалсафанинг ўрни 51

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.927

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН АРАЛАШ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

А.Уринов, М.Рахимова

Аннотация

Ушбу мақолада иккинчи тартибли бир интегро-дифференциал тенглама учун иккى нұқтади аралаш чегаравиий масала үрганилган. Бу масала ечимининг маевжудлиги ва ягоналиги исботланған.

Аннотация

В данной статье поставлена двухточечная смешанная краевая задача для одного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Доказано существование и единственность решения поставленной задачи.

Annotation

In the article a two-points mixed boundary-value problem for the second order integral-differential equation is set. The uniqueness and existence of solution of the considered problem is proved.

Таянч сүйз ва иборалар: интегро-дифференциал тенглама, аралаш чегаравиий масала, интеграл тенглама, ечим.

Ключевые слова и выражения: интегро-дифференциальное уравнение, краевая задача, интегральное уравнение, решение.

Key words and expressions: integral-differential equation, mixed boundary-value problem, integral equation, solution.

Күйидаги интегро-дифференциал тенгламани күрайлил:

$$\begin{aligned} & y''(x) + \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) + \gamma(x) \int_0^x (x-t)^{-a} ch(x+t)y(t)dt + \\ & + \delta(x) \int_x^1 (t-x)^{-b} ch(x+t)y(t)dt = f(x), \quad 0 < x < 1, \end{aligned} \quad (1)$$

бунда $a, b = const \in (0,1)$; $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x), f(x)$ - берилған функциялар.

Масала: (1) тенгламанинг $C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$ синфга төзишли ва

$$y(0) - y'(0) = k_1, \quad y(1) + y'(1) = k_2 \quad (2)$$

шарттарни қаноатлантирувчи ечими топилсін, бу ерда k_1, k_2 - берилған сонлар.

Дастлаб қўйилған масаланинг бир қийматли ечилишини текширамиз.

1-теорема. Агар $\alpha(x), \gamma(x), \delta(x) \in C^1[0,1]$, $\alpha(0) \geq 0$, $\alpha(1) \leq 0$, $\gamma(1) \leq 0$, $\gamma'(x) \geq 0$, $\delta(0) \leq 0$, $\delta'(x) \leq 0$, $\alpha'(x) - 2\beta(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$ шартлар бажарылса, $\{(1), (2)\}$ масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

Исбот. Бу теоремани исботлаш учун қўйидаги тенгламанинг

$$\begin{aligned} & y''(x) + \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) + \gamma(x) \int_0^x (x-t)^{-a} ch(x+t)y(t)dt + \\ & + \delta(x) \int_x^1 (t-x)^{-b} ch(x+t)y(t)dt = 0, \quad 0 < x < 1 \end{aligned} \quad (3)$$

ушбу бир жиңсли шартларни

А.Уринов – ФарДУ, физика-математика фанлари доктори, профессор.
М.Рахимова – ФарДУ математика ўқитиши методикаси йўналиши З-курс талабаси.

$$y(0)=y'(0), \quad y(1)=-y'(1) \quad (4)$$

қаноатлантирувчи ечими фактат $y(x) \equiv 0$ бўлишини исботлаш етарли. Бунинг учун энергия интеграллари усулидан фойдаланамиз. Аввал (3) тенгликни $y(x)$ га кўпайтирамиз ва x бўйича $[0,1]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (4) шартларни ҳисобга олиб,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [y'(x)]^2 dx + [y'(1)]^2 + [y'(0)]^2 + \int_0^1 [(1/2)\alpha'(x) - \beta(x)] y^2(x) dx - \\ & - (1/2)\alpha(1)y^2(1) + (1/2)\alpha(0)y^2(0) - \int_0^1 \gamma(x)y(x) dx \int_0^x (x-t)^{-a} ch(x+t)y(t) dt - \\ & - \int_0^1 \delta(x)y(x) dx \int_x^1 (t-x)^{-b} ch(x+t)y(t) dt = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

тенгликка эга бўламиз. (5) тенгликдаги учинчи интегрални s_1 билан белгилайлик. $ch(x+t)$ ва $(x-t)^{-a}$ функцияларнинг $ch(x+t) = (e^{x+t} + e^{-x-t})/2$,

$$(x-t)^{-a} = [\Gamma(a)\cos(a\pi/2)]^{-1} \int_0^{+\infty} \eta^{a-1} \cos[(x-t)\eta] d\eta \quad \text{кўринишларидан}$$

фойдаланиб, s_1 ни қуидагича ёзиш мумкин:

$$s_1 = [2\Gamma(a)\cos(a\pi/2)]^{-1} \int_0^{+\infty} \eta^{a-1} d\eta \int_0^1 \gamma(x) \left\{ y(x) \int_0^x (e^{x+t} + e^{-x-t}) \cos[(x-t)\eta] y(t) dt \right\} dx.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида турган ифодага $\cos(x-t) = \cos x \cos t + \sin x \sin t$,

$$e^{x+t} = e^x \cdot e^t, \quad f(x) \int_m^x f(t) dt = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\int_m^x f(t) dt \right)^2 \quad \text{формулаларни кўллаб, баъзи}$$

алмаштиришлардан сўнг қуидаги тенгликни ҳосил қиласиз:

$$\begin{aligned} s_1 = & \frac{1}{4\Gamma(a)\cos(a\pi/2)} \int_0^{+\infty} \eta^{a-1} d\eta \int_0^1 \gamma(x) \frac{d}{dx} \left[\left(\int_0^x e^t \cos(\eta t) y(t) dt \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\int_0^x e^t \sin(\eta t) y(t) dt \right)^2 + \left(\int_0^x e^{-t} \cos(\eta t) y(t) dt \right)^2 + \left(\int_0^x e^{-t} \sin(\eta t) y(t) dt \right)^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Бу ерда x бўйича интегрални бўлаклаб, ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$s_1 = \frac{1}{4\Gamma(a)\cos(a\pi/2)} \int_0^{+\infty} \eta^{a-1} d\eta \left\{ \gamma(1) \left[\left(\int_0^1 e^t \cos(\eta t) y(t) dt \right)^2 + \left(\int_0^1 e^t \sin(\eta t) y(t) dt \right)^2 \right] + \right.$$

МАТЕМАТИКА

$$\begin{aligned}
 & + \left[\left(\int_0^1 e^{-t} \cos(\eta t) y(t) dt \right)^2 + \left(\int_0^1 e^{-t} \sin(\eta t) y(t) dt \right)^2 \right] - \int_0^1 \gamma'(x) \left[\left(\int_0^x e^t \cos(\eta t) y(t) dt \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \left(\int_0^x e^t \sin(\eta t) y(t) dt \right)^2 + \left(\int_0^x e^{-t} \cos(\eta t) y(t) dt \right)^2 + \left(\int_0^x e^{-t} \sin(\eta t) y(t) dt \right)^2 \right] dx \} . \quad (5)
 \end{aligned}$$

тенгликтининг тўртинчи интегралини s_2 билан белгиласак ва юқоридаги ҳисоблашларни бажарсак, қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned}
 s_2 = & \frac{1}{4\Gamma(b)\cos(b\pi/2)} \int_0^{+\infty} \eta^{b-1} d\eta \left\{ \delta(0) \left[\left(\int_0^1 e^t \cos(\eta t) y(t) dt \right)^2 + \left(\int_0^1 e^t \sin(\eta t) y(t) dt \right)^2 + \right. \right. \\
 & + \left. \left(\int_0^1 e^{-t} \cos(\eta t) y(t) dt \right)^2 + \left(\int_0^1 e^{-t} \sin(\eta t) y(t) dt \right)^2 \right] + \int_0^1 \delta'(x) \left[\left(\int_x^1 e^t \cos(\eta t) y(t) dt \right)^2 + \right. \\
 & \left. \left. + \left(\int_x^1 e^t \sin(\eta t) y(t) dt \right)^2 + \left(\int_x^1 e^{-t} \cos(\eta t) y(t) dt \right)^2 + \left(\int_x^1 e^{-t} \sin(\eta t) y(t) dt \right)^2 \right] dx \right\} .
 \end{aligned}$$

Масалада ва 1-теоремада қўйилган шартларга асосан

$\Gamma(a) > 0, \cos(a\pi/2) > 0, \gamma(1) \leq 0, \gamma'(x) \geq 0$, $\Gamma(b) > 0, \cos(b\pi/2) > 0, \delta(0) \leq 0, \delta'(x) \leq 0$, демак, $s_1 \leq 0, s_2 \leq 0$. Буни ва $\alpha'(x) - 2\beta(x) \geq 0, \alpha(0) \geq 0, \alpha(1) \leq 0, \forall x \in [0,1]$ тенгизликларни эътиборга олсак, (5) тенгликдан ва (4) шартлардан $y(x) \equiv 0, x \in [0,1]$ эканлиги келиб чиқади. 1-теорема исботланди.

2-теорема. Агар 1-теорема шартлари бажарилса, қўйилган масаланинг өчими мавжуд ва ягона бўлади.

Исбот. (1) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб олайлик:

$$y''(x) = g(x), \quad (6)$$

бу ерда

$$\begin{aligned}
 g(x) = & f(x) - \alpha(x)y'(x) - \\
 & - \delta(x) \int_x^1 (t-x)^{-b} ch(x+t) y(t) dt - \gamma(x) \int_0^x (x-t)^{-a} ch(x+t) y(t) dt - \beta(x) y(x).
 \end{aligned}$$

2-теоремани исботлашда (6) тенгламанинг хусусий ҳоли бўлган $y''(x) = 0$ тенглама учун (4) шартлар билан қўйилган масаланинг Грин функциясидан фойдаланиш мумкин [1]. Бу функция қуйидаги кўринишга эга:

$$G(x,t) = (1/3)(t-2)(x+1), \quad x < t; \quad G(x,t) = (1/3)(t+1)(x-2), \quad x > t.$$

$\{(6), (2)\}$ масалани $z(x) = y(x) + (1/3)k_1(x-2) - (1/3)k_2(x+1)$ алмаштириш ёрдамида бир жинсли чегаравий шартли қуйидаги

$$z''(x) = g(x), \quad z(0) = z'(0), \quad z(1) = -z'(1) \quad (7)$$

масалага келтириб оламиз. Агар вақтингча $g(x)$ ни маълум функция десак, (7) масаланинг ечими Гильберт теоремасига асосан $z(x) = \int_0^1 G(x,t)g(t)dt$ формула билан аниқланади.

Бу тенглика $g(x)$ ва $z(x)$ функцияларнинг ифодасини қўямиз. Сўнгра $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ҳамда тақорорий интегралларда интеграллаш тартибини алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} y(x) = & (1/3) [k_1(2-x) + k_2(x+1) + (x+1)\alpha(1)y(1) + (x-2)\alpha(0)y(0)] + \\ & + \int_0^1 G(x,t)f(t)dt + \int_0^1 \left\{ [G(x,t)\alpha(t)]' - G(x,t)\beta(t) - \right. \\ & \left. - \int_t^1 G(x,z)\gamma(z)(z-t)^{-a} ch(z+t)dz - \int_0^t G(x,z)\delta(z)(t-z)^{-b} ch(z+t)dz \right\} y(t)dt. \quad (8) \end{aligned}$$

(8) тенглиқда дастлаб $x=1$, сўнгра $x=0$ десак, $y(1)$ ва $y(0)$ ларга нисбатан

$$\begin{cases} [1 - (2/3)\alpha(1)]y(1) + (1/3)\alpha(0)y(0) = h_1(t), \\ -(1/3)\alpha(1)y(1) + [1 + (2/3)\alpha(0)]y(0) = h_2(t) \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу ерда $h_1(t)$ ва $h_2(t)$ - (8) ифодага мос равишда $x=1$ ва $x=0$ қийматларни қўйганимизда ҳосил бўлган озод функциялардир. Бу системанинг асосий детерминанти $1 + (2/3)[\alpha(0) - \alpha(1)] - (1/3)\alpha(0)\alpha(1) \neq 0$ бўлгани учун $y(1)$ ва $y(0)$ номаълумлар бир қийматли топилади. Топилган $y(1)$ ва $y(0)$ ларни (8) тенглиқка қўйиб, уни

$$y(x) + \int_0^1 K(x,t)y(t)dt = q(x), \quad x \in [0,1] \quad (9)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда $K(x,t) = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ тўртбурчакда чегараланган ва бўлакли узлуксиз маълум функция, $q(x)$ эса $[0,1]$ оралиқда узлуксиз бўлган маълум функция. (9) интеграл тенглама - $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [1,2], қўйилган масалага эквивалентdir. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан, яъни 1-теоремадан келиб чиқади. 2-теорема исботланди.

Адабиётлар:

1. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. – Т.: МУМТОЗ Сўз, 2014.
2. Салоҳиддинов М.С. Интеграл тенгламалар. – Т.: Yangiyul polygraph service, 2007.