ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

3-2021

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

Муассис: Фарғона давлат университети.

«FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ» журнали бир йилда олти марта чоп этилади.

Журнал филология, кимё ҳамда тарих фанлари бўйича Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрлар рўйхатига киритилган.

Журналдан мақола кўчириб босилганда, манба кўрсатилиши шарт.

Ўзбекистон Республикаси Президенти Администрацияси ҳузуридаги Ахборот ва оммавий коммуникациялар агентлиги томонидан 2020 йил 2 сентябрда 1109 рақами билан рўйхатга олинган.

Муқова дизайни ва оргинал макет ФарДУ таҳририят-нашриёт бўлимида тайёрланди.

Таҳририят манзили:
150100, Фарғона шаҳри, Мураббийлар кўчаси, 19-уй.
Тел.: (0373) 244-44-57. Мобил тел.: (+99891) 670-74-60
Сайт: www.fdu.uz

Босишга рухсат этилди:
Қоғоз бичими: - 60×84 1/8
Босма табоғи:
Офсет босма: Офсет қоғози.
Адади: 50 нусха
Буюртма №
ФарДУ нусха кўпайтириш бўлимида чоп этилди.
Манзил: 150100, Фарғона ш., Мураббийлар кўчаси, 19-уй.

Фарғона,
2021.

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

БИОЛОГИЯ, ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИ

КИМЁ

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ТАРИХ

УДК:517.956.223

ИККИНЧИ ТУР БУЗИЛАДИГАН ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМА УЧУН СИЛЖИШЛИ МАСАЛА
ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА
THE PROBLEM OF SHIFT FOR ONE DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATION OF THE SECOND KIND

Оқбоев Акмалжон Бахромжонович[1], Муталлиев Нодирбек Назиржон ўғли[2]

[1]Оқбоев Акмалжон Бахромжонович – *Ўзбекистон Фанлар академияси Математика институти, Наманган вилояти ҳудудий бўлинмаси кичик илмий ходими.*

[2]Муталлиев Нодирбек Назиржон ўғли – *НамДУ, математика йўналиши магистранти.*

Аннотация

Мақолада бузиладиган гиперболик типдаги иккинчи тур тенглама ўзининг характеристикалари билан чегараланган соҳада қаралган. Қаралаётган тенглама учун силжишли бир масала баён қилинган. Қўйилган масаланинг ечими қаралаётган тенгламанинг умумий ечимидан фойдаланиб топилган. Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилиши учун берилган функцияларга зарурий шартлар топилган. Ўрганиш жараёнида Похгаммер символи ва Гаусснинг гипергеометрик функцияси хоссаларидан фойдаланилган.

Аннотация

В данной работе рассмотрено вырождающееся уравнение гиперболического типа второго рода в области, ограниченной его характеристиками. Поставлена задача со смещением для рассматриваемого уравнения. Решение задачи было найдено с использованием общего решения рассматриваемого уравнения. Найдены достаточные условия, обеспечивающие однозначную разрешимость поставленных задач. В исследовании использовались свойства символа Похгаммера и гипергеометрической функции Гаусса.

Annotation

In the work a problem with shift conditions for a second kind degenerated hyperbolic type equation has been formulated and unique solvability of the considered problem has been investigated. The solution of the problem was found by using general solution of the equation. The problem was reduced to an integral equation with respect to trace of the unknown function. During the investigation of the problem the properties of Gauss's hyperheometric function and symbol of Pochhammer have been used.

Таянч сўз ва иборалар: *гиперболик типдаги тенглама, силжишли масала, ечимнинг ягоналиги.*

Ключевые слова и выражения: *уравнение гиперболического типа, задача со смещением, единственность решения.*

Keywords and expressions: *equation of the hyperbolic type, problem of shift conditions, uniqueness of the solution.*

Кириш. Масаланинг қўйилиши

Бузиладиган тенгламалар хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясида марказий ўринни эгаллайди ва фаннинг турли соҳаларида кўплаб татбиқларга эга. Масалан, бузиладиган гиперболик тенгламалар газлар динамикаси, айланма сиртларнинг чексиз кичик букилиш назарияси, компьютер томографияси ва бошқа кўплаб соҳалар масалаларини ечишда учрайди. Бузиладиган гиперболик тенгламанинг бузилиш чизиғи тенгламанинг характеристикаси бўлса, у иккинчи турдаги тенглама деб аталади.

Бузиладиган гиперболик типдаги иккинчи турдаги ушбу

$$L_{-n+1/2}(u) \equiv u_{xx} + yu_{yy} + (-n+1/2)u_y = 0, \quad y<0, \; n \in N \tag{1}$$

тенгламани D соҳада қарайлик, бу ерда D - (1) тенгламанинг характеристикалари $AB: y=0$, $AC: x-2\sqrt{-y}=0$, $BC: x+2\sqrt{-y}=1$ билан чегараланган соҳа.

Қайд этиш жоизки, (1) тенглама учун кўриниши ўзгарган Коши масаласи Ю.М.Крикунов томонидан қўйилган ва масала ечимидан фойдаланиб гиперболик қисми (1) тенгламадан иборат бўлган эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун турли чегаравий масалалар баён қилинган ва ўрганилган [1]. Бундан ташқари, Р.С.Хайруллин томонидан гиперболик қисми (1) тенгламадан иборат бўлган эллиптик-гиперболик типдаги тенглама учун турли чегаравий масалалар баён қилинган ва ўрганилган [2, 3]. Биз ушбу ишимизда қуйидаги силжишли масалани ўрганамиз.

Н масала. Қуйидаги шартларни ва (1) тенгламани қаноатлантирувчи $u(x,y)\in C(\overline{D})$ функция топилсин:

$$u(x,0)=\tau(x),\ \forall x\in[0,1], \tag{2}$$

$$a(x)\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}u(\theta_0)+b(x)\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}u(\theta_1)+$$

$$+c(x)\lim_{y\to -0}(-y)^{1/2-n}\left[u-A^{-}_{n+1/2}(\tau)\right]=f(x),\ \forall x\in(0,1), \tag{3}$$

бу ерда $\tau(x), a(x), b(x), c(x), f(x)$ – берилган функциялар бўлиб, ушбу $a^2(x)+b^2(x)+c^2(x)\neq 0$ тенгсизлик ўринли,

$$A^{-}_{n+1/2}(\tau)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(2n-k)!2^{2k}(-y)^{k/2}}{k!(n-k)!(2n)!}\left[\tau^{(k)}\left(x-2\sqrt{-y}\right)+(-1)^k\tau^{(k)}\left(x+2\sqrt{-y}\right)\right]$$

$\theta_0=\left(x/2,-x^2/16\right)$, $\theta_1=\left((1+x)/2,-(1-x)^2/16\right)$ – эса мос равишда $E(x,0)$ нуқтадан чиқувчи (1) тенгламанинг характеристикалари билан AC ва BC характеристикаларининг кесишиш нуқтаси.

Таъкидлаш жоизки, Н масалага ўхшаш масала $u_{xx}-u_{yy}=0$ ва $yu_{xx}-u_{yy}=0$ тенгламалар учун биринчи бўлиб А.М.Нахушев томонидан қўйилган ва тадқиқ этилган [4]. Шундан сўнг кўплаб тадқиқотчилар томонидан турли тенгламалар учун силжишли масалалар ўрганилди [5-8]. Н масаланинг қўйилишидан кўриниб турибдики, масалада $a(x)\equiv b(x)\equiv 0$ бўлганда кўриниши ўзгарган Коши масаласи келиб чиқади [1, 9], $a(x)\equiv c(x)\equiv 0$ (ёки $b(x)\equiv c(x)\equiv 0$) бўлганда эса, Дарбу масаласи келиб чиқади.

2. Асосий қисм

Н масала ечимини (1) тенгламанинг ушбу [1]

$$u=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-k)!2^{2k}(-y)^{k/2}}{k!(n-k)!}\left[\varphi^{(k)}\left(x-2\sqrt{-y}\right)+(-1)^k\varphi^{(k)}\left(x+2\sqrt{-y}\right)\right]+$$

$$+(-y)^{n+1/2}\int_0^1\psi\left[x-2\sqrt{-y}(1-2z)\right]\left[z(1-z)\right]^n dz \tag{4}$$

умумий ечими кўринишида қидирамиз, бу ерда φ, ψ - етарлича силлиқ бўлган ихтиёрий функциялар. Бунинг учун (4) функцияни (2) шартга бўйсундириб,

$$\varphi(x)=\frac{n!}{2(2n)!}\tau(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Охирги тенгликни (4) формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(2n-k)!\,2^{2k-1}(-y)^{k/2}}{k!(n-k)!(2n)!}\left[\tau^{(k)}\left(x-2\sqrt{-y}\right)+(-1)^{k}\tau^{(k)}\left(x+2\sqrt{-y}\right)\right]+$$

$$+(-y)^{n+1/2}\int_{0}^{1}\psi\left[x-2\sqrt{-y}(1-2z)\right]\left[z(1-z)\right]^{n}dz. \tag{5}$$

(5) функциядан фойдаланиб, $u(\theta_0)$ ни ҳисоблаб оламиз:

$$u\left(x/2,-x^{2}/16\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(2n-k)!\,2^{-1}x^{k}}{k!(n-k)!(2n)!}\left[\tau^{(k)}(0)+(-1)^{k}\tau^{(k)}(x)\right]+$$

$$+\left(\frac{x^{2}}{16}\right)^{-n+1/2}\int_{0}^{1}\psi(xz)\left[z(1-z)\right]^{n}dz. \tag{6}$$

(6) тенгликдаги интегралда $t=xz$ каби алмаштириш бажарсак,

$$u(\theta_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(2n-k)!\,2^{-1}x^{k}}{k!(n-k)!(2n)!}\left[\tau^{(k)}(0)+(-1)^{k}\tau^{(k)}(x)\right]+4^{2n-1}\int_{0}^{x}\psi(t)\left[t(x-t)\right]^{n}dt \tag{7}$$

га эга бўламиз. $\tau(x)$ функцияни $2n+1$ марта дифференциаллаш мумкин, деб фараз қилиб ва (7) функциядан фойдаланиб $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}u(\theta_0)$ ни ҳисоблаб оламиз [8, 9]:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}u(\theta_0)=(-1)^{n}\frac{n!}{2(2n)!}x^{n}\tau^{(2n+1)}(x)+4^{2n-1}n!\,\psi(x)x^{n}. \tag{8}$$

Энди $u(\theta_1)$ ни ҳисоблайлик. Бунинг учун (5) функцияга $\theta_1=\left(\frac{1+x}{2},-\frac{(1-x)^{2}}{16}\right)$ ни қўямиз

$$u(\theta_1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(2n-k)!\,2^{-1}}{k!(n-k)!(2n)!}(1-x)^{k}\left[\tau^{(k)}(x)+(-1)^{k}\tau^{(k)}(1)\right]+$$

$$+4^{2n-1}\int_{x}^{1}\psi(t)\left[(1-t)(t-x)\right]^{n}dt. \tag{9}$$

(9) дан фойдаланиб $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}u(\theta_1)$ ни ҳисоблаб оламиз:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}u(\theta_1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(2n-k)!\,2^{-1}}{k!(n-k)!(2n)!}\sum_{m=0}^{n+1}C_{n+1}^{m}(-k)_{m}(1-x)^{k-m}\tau^{(1+n+k-m)}(x)+$$

$$+4^{2n-1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\int_{x}^{1}\psi(t)\left[(1-t)(t-x)\right]^{n}dt. \tag{10}$$

$k < m$ бўлганда $(-k)_m = 0$ тенглик бажарилишини эътиборга олиб, (10) ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}u(q_1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!(2n-k)!2^{-1}}{k!(n-k)!(2n)!}\sum_{m=0}^{k} C_{n+1}^{m}(-k)_m (1-x)^{k-m}\, t^{(1+n+k-m)}(x) +$$

$$+4^{2n-1}n!(-1)^n y(x)(1-x)^n,$$

бу ерда $(a)_k$ – Похгаммер символи, $(a)_0 = 1,\ (a)_k = a(a+1)(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+k-1)$ кўринишда аниқланади. $s = k - m$ алмаштириш бажарсак, охирги тенглик қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}u(q_1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!(2n-k)!2^{-1}}{k!(n-k)!(2n)!}\sum_{s=0}^{k} C_{n+1}^{k-s}(-k)_{k-s}(1-x)^s\, t^{(1+n+s)}(x) +$$

$$+4^{2n-1}n!(-1)^n y(x)(1-x)^n. \qquad (11)$$

Йиғиндиларнинг тартибини ўзгартириб, қуйидаги

$$C_{n+1}^{k-s} = \frac{(n+1)!}{(k-s)!(1+n+s-k)!},$$

$$(-k)_{k-s} = \frac{(-1)^{s+k}k!}{s!}$$

тенгликларни эътиборга олсак, (11) тенглик

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}u(q_1) = \frac{(n+1)!n!}{2(2n)!}\sum_{s=0}^{n}\frac{1}{s!}(1-x)^s\, t^{(1+n+s)}(x)\sum_{k=s}^{n}\frac{(-1)^{k+s}(2n-k)!}{(k-s)!(1+n+s-k)!(n-k)!} +$$

$$+4^{2n-1}n!(-1)^n y(x)(1-x)^n$$

кўринишга келади. Бу ерда k нинг ўрнига $k+s$ ни қўйсак,

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}u(q_1) = \frac{(n+1)!n!}{2(2n)!}\sum_{s=0}^{n}\frac{1}{s!}(1-x)^s\, t^{(1+n+s)}(x)\sum_{k=0}^{n-s}\frac{(-1)^{k}(2n-k-s)!}{k!(1+n-k)!(n-k-s)!} +$$

$$+4^{2n-1}n!(-1)^n y(x)(1-x)^n$$

тенгликка келамиз. $n! = (1)_n$ дан фойдаланиб [10], охирги тенгликни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}u(q_1) = \frac{(n+1)!n!}{2(2n)!}\sum_{s=0}^{n}\frac{(2n-s)!}{s!(1+n)!(n-s)!}(1-x)^s\, t^{(1+n+s)}(x) \times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n-s}\frac{(-1-n)_k(-n+s)_k}{(-2n+s)_k\, k!} + 4^{2n-1}n!(-1)^n y(x)(1-x)^n.$$

Ушбу [10]

$$\sum_{k=0}^{n-s}\frac{(-1-n)_k(-n+s)_k}{(-2n+s)_k\, k!} = F(-1-n, -n+s; -2n+s; 1),$$

$$F(-n,b,c;1)=\frac{(c-b)_n}{(c)_n},$$

$$(a-n)_n=(-1)^n(1-a)_n$$

тенгликлардан фойдаланиб, охирги тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}u(q_1)=\frac{(n+1)!n!}{2(2n)!}\sum_{s=0}^{n}\frac{(2n-s)!(0)_{n-s}}{s!(1+n)!(n-s)!(1+n)_{n-s}}(1-x)^s t^{(1+n+s)}(x)+$$

$$+4^{2n-1}n!(-1)^n y(x)(1-x)^n,$$

бу ерда $F(a,b;c;x)$ – Гausснинг гипергеометрик функцияси. $(0)_0=1,\quad (0)_n=0,$ $n\in N$ тенгликларни эътиборга олиб, охирги тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}u(q_1)=\frac{n!}{2(2n)!}(1-x)^n t^{(1+2n)}(x)+4^{2n-1}n!(-1)^n y(x)(1-x)^n. \qquad (12)$$

Энди ушбу $\lim\limits_{y\to -0}(-y)^{1/2-n}\left[u-A^{-}_{1/2-n}(t)\right]_y$ лимитни ҳисоблаймиз. Бунинг учун (8) функциядан $A^{-}_{1/2-n}(t)$ операторни айириб, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$u-A^{-}_{1/2-n}(t)=(-y)^{n+1/2}\int_0^1 y\left[x-2\sqrt{-y}(1-2z)\right]\left[z(1-z)\right]^n dz.$$

Охирги ифодадан y бўйича ҳосила олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left[u-A^{-}_{1/2-n}(t)\right]_y=-(n+1/2)(-y)^{n-1/2}\int_0^1 y\left[x-2\sqrt{-y}(1-2z)\right]\left[z(1-z)\right]^n dz-$$

$$-(-y)^n\int_0^1 y'\left[x-2\sqrt{-y}(1-2z)\right](1-2z)\left[z(1-z)\right]^n dz.$$

Олинган ҳосилага $(-y)^{1/2-n}$ ифодани кўпайтириб $y\to -0$ бўлганда лимитга ўтсак,

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{1/2-n}\left[u-A^{-}_{1/2-n}(t)\right]_y=-(n+1/2)y(x)\int_0^1\left[z(1-z)\right]^n dz=$$

$$=-(n+1/2)B(n+1,n+1)y(x)=-\left[(n!)^2/2(2n)!\right]y(x) \qquad (13)$$

га эга бўламиз, бу ерда $B(a,b)$ – бета - функция.

Олинган (8), (12), (13) натижаларни (3) шартга қўйиб, қуйидаги $y(x)$ га нисбатан чизиқли алгебраик тенгламага эга бўламиз:

$$\left\{4^{2n-1}n!x^n a(x)+4^{2n-1}n!(-1)^n(1-x)^n b(x)-\left[(n!)^2/2(2n)!\right]c(x)\right\}y(x)=$$

$$=f(x)-\frac{(-1)^n n!}{2(2n)!}x^n t^{(2n+1)}(x)a(x)-\frac{n!}{2(2n)!}(1-x)^n t^{(2n+1)}(x)b(x),\ \forall x\in(0,1).$$

(14)

Ушбу

$$4^{2n-1}x^n a(x)+4^{2n-1}(-1)^n(1-x)^n b(x)-\left[n!/2(2n)!\right]c(x)\neq 0 \qquad (15)$$

шарт бажарилсин. (15) ни эътиборга олиб, (14) тенгламадан $\psi(x)$ ни бир қийматли топиб оламиз:

$$\psi(x)=\frac{2(2n)!f(x)-(-1)^n n!x^n\tau^{(2n+1)}(x)a(x)-n!(1-x)^n\tau^{(2n+1)}(x)b(x)}{4^{2n-1}n!2(2n)!x^n a(x)+4^{2n-1}n!2(2n)!(-1)^n(1-x)^n b(x)-(n!)^2 c(x)}. \qquad (16)$$

Фараз қилайлик, ушбу

$$\tau(x)\in C^{(2n+3)}[0,1];\ a(x),b(x),c(x),f(x)\in C^2[0,1], \qquad (17)$$

шартлар ўринли бўлсин. У ҳолда (16) ва (17) лардан $\psi(x)\in C^2[0,1]$ эканлиги келиб чиқади. Топилган $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларни (4) тенгликка қўйиб Н масала ечимини ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, биз ушбу теоремани исботладик.

Теорема. Агар (15) ва (17) шартлар бажарилса, Н масала ягона ечимга эга бўлади.

Изоҳ. Агар $4^{2n-1}x^n a(x)+4^{2n-1}(-1)^n(1-x)^n b(x)-\left[n!/2(2n)!\right]c(x)=0$ бўлиб

$$f(x)-\frac{(-1)^n n!}{2(2n)!}x^n\tau^{(2n+1)}(x)a(x)-\frac{n!}{2(2n)!}(1-x)^n\tau^{(2n+1)}(x)b(x)=0$$ бўлса,

қўйилган Н масала чексиз кўп ечимга эга бўлади.

Агар $4^{2n-1}x^n a(x)+4^{2n-1}(-1)^n(1-x)^n b(x)-\left[n!/2(2n)!\right]c(x)=0$ тенглик бажарилиб, $$f(x)-\frac{(-1)^n n!}{2(2n)!}x^n\tau^{(2n+1)}(x)a(x)-\frac{n!}{2(2n)!}(1-x)^n\tau^{(2n+1)}(x)b(x)\neq 0$$

бўлса, қўйилган Н масала ечимга эга бўлмайди.

Адабиётлар:

1. Крикунов Ю.М. Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. – Казань: Издательство Казанского университета, 1986.
2. Хайруллин Р.С. Задача Трикоми для уравнения второго рода с сильным вырождением. -Казань: Издательство Казанского университета, 2015.
3. Хайруллин Р.С. Задача Трикоми для уравнения второго рода в неограниченных областях. - Казань: Издательство Казанского университета, 2016.
4. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. No 1.
5. Елеев В.А. О некоторых задачах типа задачи Коши и задачи со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения. Дифференциальные уравнения. 1976. Том 12. No 1.
6. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. – Ташкент: Фан, 1997.
7. Салахитдинов М.С., Эргашев Т.Г. О двух краевых задачах со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения второго рода. Доклады АН УзССР. 1991. No 2.
8. Окбоев А.Б. Краевая задача типа А.М.Нахушева для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода. Бюллетень Института математики. 2018, №4.
9. Терсенов С.А. К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа //Сибирский математический журнал, 1961, Т.2, №6.
10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т.3. Специальные функции. Дополнительные главы.-2-е изд., исправ. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

(Тақризчи: А.Ўринов – физика-математика фанлари доктори, профессор).