ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

3-2021

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

Муассис: Фарғона давлат университети.

«FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ» журнали бир йилда олти марта чоп этилади.

Журнал филология, кимё ҳамда тарих фанлари бўйича Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрлар рўйхатига киритилган.

Журналдан мақола кўчириб босилганда, манба кўрсатилиши шарт.

Ўзбекистон Республикаси Президенти Администрацияси ҳузуридаги Ахборот ва оммавий коммуникациялар агентлиги томонидан 2020 йил 2 сентябрда 1109 рақами билан рўйхатга олинган.

Муқова дизайни ва оргинал макет ФарДУ таҳририят-нашриёт бўлимида тайёрланди.

Таҳририят манзили:
150100, Фарғона шаҳри, Мураббийлар кўчаси, 19-уй.
Тел.: (0373) 244-44-57. Мобил тел.: (+99891) 670-74-60
Сайт: www.fdu.uz

Босишга рухсат этилди:
Қоғоз бичими: - 60×84 1/8
Босма табоғи:
Офсет босма: Офсет қоғози.
Адади: 50 нусха
Буюртма №
ФарДУ нусха кўпайтириш бўлимида чоп этилди.
Манзил: 150100, Фарғона ш., Мураббийлар кўчаси, 19-уй.

Фарғона,
2021.

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

Ижтимоий-гуманитар фанлар

УДК: 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

NONLOCAL PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL EQUATION WITH PARTIAL DERIVATIVES OF THE FOURTH ORDER

ТЎРТИНЧИ ТАРТИБЛИ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН НОЛОКАЛ МАСАЛА

Аманов Джумаклич [1], Сиражиддинов Санжарбек[2]

[1]**Аманов Джумаклич** – *Доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений ФерГУ, доктор физико-математических наук.*

[2]**Сиражиддинов Санжарбек** – *Магистрант кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений ФерГУ.*

Аннотация

Мақолада тўртинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама учун битта нолокал масала ўрганилган. Масала ечимининг ягоналиги спектрал усул билан исботланган. Масала ечимининг мавжудлигини исботлаш учун ўзгарувчиларни ажратиш усули қўлланилган.

Аннотация

В статье изучается одна нелокальная задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка. Спектральным методом доказывается единственность решения задачи. Для доказательства существования решения применяется метод разделения переменных.

Annotation

In this paper a nonlocal problem for fourth order partial differential equation is studied. An uniqueness of solution of this problem by spectral method is proved.The method of separation of variables is applied to solve the considered problem.

Таянч сўз ва иборалар: *нолокал масала, спектрал усул, ўзгарувчиларни ажратиш усули, масала ечимининг ягоналиги, масала ечимининг мавжудлиги.*

Ключевые слова и выражения: *нелокальная задача, спектральный метод, метод разделения переменных, единственность решение задачи, существование решения задачи.*

Keywords and expressions: *nonlocal problem, spectral method, method of separation of variables, the uniqueness of the solution, the existence of the solution.*

Краевым задачам для уравнений четвертого порядка посвящены работы [1,8] и других авторов. Нелокальным задачам для уравнения четвертого порядка посвящены другие работы [9,16]. В монографиях [17,18] также изучаются нелокальные задачи. Следует особо отметить монографию [8], где излагается классификация уравнений с частными производными четвертого порядка с двумя независимыми переменными, указываются приложения этих уравнений и исследуются некоторые краевые задачи для уравнений с частными производными четвертого порядка. Там же можно найти наиболее полную библиографию по уравнениям с частными производными четвертого порядка.

В настоящей работе в области $\Omega=\{(x,t):0<x<p,0<t<T\}$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=f(x,t), \tag{1}$$

где $f(x,t)-$ заданная гладкая функция в $\overline{\Omega}$.

2. Постановка задачи.

Задача. Найти в области Ω решение $u(x,t)\in C_{x,t}^{4,2}(\overline{\Omega})$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,t)=0,\ u(p,t)=0,\ 0\le t\le T, \tag{2}$$

$$u_{xx}(0,t)=0, u_{xx}(p,t)=0, 0\le t\le T, \tag{3}$$

$$u(x,0)=u(x,T),\ 0\le x\le p, \tag{4}$$

$$u_t(x,0)=u_t(x,T), 0\le x\le p. \tag{5}$$

3. Единственность решения задачи (1)-(5) .

Единственность решения докажем спектральным методом.

Теорема 1. *Решение задачи (1) –(5) единственно, если оно существует.*

Доказательство. Пусть $f(x,t)=0$ в $\overline{\Omega}$. Покажем, что $u(x,t)=0$ в $\overline{\Omega}$.

Следуя [19], рассмотрим интегралы

$$\alpha_n(t)=\int_0^p u(x,t)X_n(x)dx, \quad n=1,2,... \tag{6}$$

где функции $X_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{p}}\sin(\lambda_n x),\ \lambda_n=\dfrac{n\pi}{p},\ n=1,2,...$, образуют полную ортонормированную систему в $L_2(0,p)$ [20].

Продифференцируя (6) дважды по t, имеем

$$\alpha_n''(t)=\int_0^p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}X_n(x)dx. \tag{7}$$

Учитывая однородное уравнение, соответствующее (1), получаем

$$\alpha_n''(t)=\int_0^p \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}X_n(x)dx.$$

Интегрируя по частям правую часть, находим

$$\alpha_n''(t)-\lambda_n^4 u_n(t)=0,$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\alpha_n(t)=a_n e^{-\lambda_n^2 t}+b_n e^{\lambda_n^2 t}, \tag{8}$$

где a_n и b_n - неизвестные постоянные.

Для нахождения a_n и b_n используем условия (4) и (5). Тогда получаем систему уравнений относительно a_n и b_n:

$$\begin{cases}\left(1-e^{-\lambda_n^2 T}\right)a_n+\left(1-e^{\lambda_n^2 T}\right)b_n=0,\\ \left(1+e^{-\lambda_n^2 T}\right)a_n-\left(1-e^{\lambda_n^2 T}\right)b_n=0.\end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\Delta=2\left(e^{\lambda_n^2 T}-1\right)\neq 0.$$

Отсюда следует $a_n=0,\quad b_n=0$.

Тогда из (8) следует, что $\alpha_n(t)=0$, а (6) принимает вид

$$\int_0^p u(x,t)X_n(x)dx = 0\,,\quad n = 1,2,\ldots.$$

Так как система функции $X_n(x),\ n = 1,2,\ldots$ ортонормированная и полна в $L_2(0,p)$, то функция $u(x,t) = 0$ почти всюду в Ω. Но по условию задачи $u(x,t) \in C_{x,t}^{4,2}(\overline{\Omega})$, поэтому $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

4. Существование решения задачи (1)-(5).

Решение задачи (1)-(5) ищем в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x). \tag{9}$$

Функцию $f(x,t)$ также разложим в ряд Фурье

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x), \tag{10}$$

где

$$f_n(t) = \int_0^p f(x,t)X_n(x)dx\,. \tag{11}$$

Подставляя (9) и (10) в уравнение (1), получаем

$$u_n''(t) - \lambda_n^4 u_n(t) = f_n(t). \tag{12}$$

Условия (4) и (5) переходят в следующие

$$u_n(0) = u_n(T)\,, \tag{13}$$

$$u_n'(0) = u_n'(T)\,. \tag{14}$$

Общее решение уравнения (12) имеет вид

$$u_n(t) = a_n(t)e^{-\lambda_n^2 t} + b_n(t)e^{\lambda_n^2 t}\,. \tag{15}$$

Для определения неизвестных $a_n(t)$ и $b_n(t)$ имеем систему

$$\begin{cases} a_n'(t)e^{-\lambda_n^2 t} + b_n'(t)e^{\lambda_n^2 t} = 0, \\ -a_n'(t)e^{-\lambda_n^2 t} + b_n'(t)e^{\lambda_n^2 t} = \dfrac{f_n(t)}{\lambda_n^2}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$a_n(t) = a_n(0) - \frac{1}{2\lambda_n^2}\int_0^t f_n(\tau)e^{\lambda_n^2 \tau}d\tau\,,\ \ b_n(t) = b_n(0) + \frac{1}{2\lambda_n^2}\int_0^t f_n(\tau)e^{-\lambda_n^2 \tau}d\tau\,.$$

Подставляя их в (15), имеем

$$u_n(t) = a_n(0)e^{-\lambda_n^2 t} + b_n(0)e^{\lambda_n^2 t} + \frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^t sh\lambda_n^2(t-\tau)f_n(\tau)d\tau\,. \tag{16}$$

Используя условия (13) и (14), находим

$$a_n(0) = -\frac{1}{2\lambda_n^2}\int_0^T f_n(\tau)\frac{e^{-\lambda_n^2(T-\tau)}}{1-e^{-\lambda_n^2 T}}d\tau\,,\ b_n(0) = \frac{1}{2\lambda_n^2}\int_0^T f_n(\tau)\frac{e^{\lambda_n^2(T-\tau)}}{1-e^{\lambda_n^2 T}}d\tau\,.$$

Найденные $a_n(0)$ и $b_n(0)$ подставляем в (16). Тогда получим

$$u_n(t)=-\frac{e^{-\lambda_n^2 t}}{2\lambda_n^2}\int_0^T \frac{e^{-\lambda_n^2(T-\tau)}}{1-e^{-\lambda_n^2 T}} f_n(\tau)d\tau+\frac{e^{\lambda_n^2 t}}{2\lambda_n^2}\int_0^T \frac{e^{\lambda_n^2(T-\tau)}}{1-e^{\lambda_n^2 T}} f_n(\tau)d\tau+\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^t sh\lambda_n^2(t-\tau)d\tau.$$

Отсюда, производя несложные преобразования, имеем

$$u_n(t)=-\frac{1}{2\lambda_n^2}\int_0^T k_n(t,\tau)f_n(\tau)d\tau, \tag{17}$$

где

$$k_n(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{e^{\lambda_n^2(T-(t-\tau))}+e^{\lambda_n^2(t-\tau)}}{e^{\lambda_n^2 T}-1}, & 0\le\tau\le t,\\[2ex] \dfrac{e^{\lambda_n^2}\left(T-(\tau-t)\right)+e^{\lambda_n^2(\tau-t)}}{e^{\lambda_n^2 T}-1}, & t\le\tau\le T.\end{cases}$$

Подставляя (17) в (9) получаем решение задачи (1)-(5) в виде

$$u(x,t)=-\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\frac{1}{2\lambda_n^2}\int_0^T k_n(t,\tau)f_n(\tau)d\tau. \tag{18}$$

Производные от искомой функции, которые участвуют в уравнениях и условиях (3), (5) имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)}{2}\int_0^T k_n(t,\tau)f_n(\tau)d\tau, \tag{19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)}{2}\left\{\int_0^t \frac{e^{\lambda_n^2(T-(t-\tau))}-e^{\lambda_n^2(t-\tau)}}{e^{\lambda_n^2 T}-1}f_n(\tau)d\tau-\int_t^T \frac{e^{\lambda_n^2(T-(\tau-t))}-e^{\lambda_n^2(\tau-t)}}{e^{\lambda_n^2 T}-1}f_n(\tau)d\tau\right\}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)}{2}\lambda_n^2\int_0^T k_n(t,\tau)f_n(\tau)d\tau, \tag{21}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(x)}{2}\lambda_n^2\int_0^T k_n(t,\tau)f_n(\tau)d\tau. \tag{22}$$

Нам необходимо доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов (18)-(22). Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Если* $f(x,t)\in C(\overline{\Omega}),\ f(0,t)=f(p,t)=0,\ \frac{\partial f}{\partial x}\in L_2(\Omega)$, *тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x) \tag{23}$$

сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Для ряда (23) мажорантой будет ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(t)\right|$. Интегрируя по частям интеграл в (11) имеем $f_n(t)=\frac{1}{\lambda_n}f_n^{(1,0)}(t)$, где $f_n^{(1,0)}(t)=\int_0^p\frac{\partial f}{\partial x}\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_n x dx$. В силу этого $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(t)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|f_n^{(1,0)}(t)\right|$. Применяя к последней сумме неравенство Буняковского для суммы [22] находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|f_n^{(1,0)}(t)\right|\le\frac{p}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n^{(1,0)}(t)\right|^2\right)^{1/2}\le\frac{p}{\sqrt{6}}\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Здесь мы воспользовались равенством $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ [21, стр.52].

Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (23). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если $f(x,t)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, то ряд (18) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Оценим $\left|k_n(t,\tau)\right|$. Сперва оценим его на отрезке $0\le\tau\le t$. Учитывая очевидное неравенство $e^{\lambda_n^2|t-\tau|}\le e^{\lambda_n^2 T}$, имеем

$$k_n(t,\tau)\le\frac{e^{\lambda_n^2 T}\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+1\right]}{e^{\lambda_n^2 T}\left(1-e^{-\lambda_n^2 T}\right)}\le\frac{2}{1-\frac{1}{e^{\lambda_n^2 T}}}\le\frac{2}{1-\frac{1}{e^{T\pi^2/p^2}}}=2C_0,$$

где $C_0=1\Big/\left[1-e^{-T(\pi/p)^2}\right]$.

В случае $t\le\tau\le T$ как и выше получаем $k_n(t,\tau)\le 2C_0$. Таким образом, $k_n(t,\tau)=\left|k_n(t,\tau)\right|\le 2C_0$ в $[0,T]$. Следовательно

$$\left|u(x,t)\right|\le\sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_0}{\lambda_n^2}\int_0^T\left|f_n(\tau)\right|d\tau.$$

По условию леммы 2 $\left|f(x,t)\right|\le C_1$, где $C_1>0$.

Из (11) имеем $\left|f_n(t)\right|\le\sqrt{2/p}\int_0^p\left|f(x,t)\right|dx\le C_1\sqrt{2p}$.

Вернемся к (18) и учитывая последнее равенство находим

$$\left|u(x,t)\right|\le\sqrt{\frac{2}{p}}C_0C_1\sqrt{2p}T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}=\frac{T}{3}C_0C_1p^2.$$

Следовательно, ряд (18) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$. Лемма 2 доказана.

Отметим, что если ряд (22) сходится абсолютно и равномерно, то ряд (19) также сходится абсолютно и равномерно. Точно также из сходимости ряда (21) следует сходимость ряда (20).

Лемма 3. Если $f(x,t)\in C^{4,0}_{x,t}(\overline{\Omega})$ и $f(0,t)=f(p,t)=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,t)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p,t)=0$, то ряд (22) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Справедливы равенства

$$\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|\le\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\int_0^T k_n(t,\tau)\left|f_n(\tau)\right|d\tau\le\sqrt{\frac{2}{p}}C_0\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\int_0^T\left|f_n(t)\right|dt. \tag{23}$$

Правую часть равенства (11) интегрируя по частям четыре раза по x, получаем

$$f_n(t)=\frac{1}{\lambda_n^4}\int_0^p\frac{\partial^4 f(x,t)}{\partial x^4}\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\lambda_n x dx.$$

В силу условия теоремы $\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|\le C_2$, где $C_2=const>0$. Учитывая это имеем $\left|f_n(t)\right|\le\frac{1}{\lambda_n^4}\sqrt{\frac{2}{p}}C_2$. Подставляя это в (23), находим

$$\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|\le\sqrt{\frac{2}{p}}C_0\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\int_0^T\frac{1}{\lambda_n^4}\sqrt{\frac{2}{p}}C_2dt=\frac{C_0C_2}{3}Tp.$$

Следовательно, ряд (22) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *В условиях леммы 3 ряд (21) сходится абсолютно и равномерно в* $\overline{\Omega}$.

Доказательство . Ряд (21) отличается от ряда (22) слагаемым

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(x),$$

который согласно лемме 1 сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$. Поэтому ряд (21) также сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если* $f(x,t)\in C^{2,0}_{x,t}(\overline{\Omega})$, $f(0,t)=f(p,t)=0$ *то ряд (19) сходится абсолютно и равномерно в* $\overline{\Omega}$.

Доказательство . Справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\le\sqrt{\frac{2}{p}}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T k_n(t,\tau)\left|f_n(\tau)\right|d\tau\le\sqrt{\frac{2}{p}}C_0\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\left|f_n(t)\right|dt.$$

Согласно (11) $f_n(t)=\int_0^p f(x,t)X_n(x)dx$. Интегрируя его по частям два раза по x, имеем

$$\left|f_n(t)\right| \le \sqrt{\frac{2}{p}}\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^p\left|\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right|dx \le \sqrt{\frac{2}{p}}C_2 p\frac{1}{\lambda_n^2}.$$

Учитывая это находим

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \le 2C_0C_2T\frac{p^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{3}C_0C_2Tp^2.$$

Следовательно, ряд (19) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть выполняются условия леммы 5. Тогда ряд (20) сходится абсолютно и равномерно в* $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Отметим, что справедливы неравенства

1) $e^{\lambda_n^2[T-(t-\tau)]} - e^{\lambda_n^2(t-\tau)} \le e^{\lambda_n^2[T-(t-\tau)]} + e^{\lambda_n^{2(t-\tau)}},\ 0 \le \tau \le t$;

2) $-e^{\lambda_n^2[T-(\tau-t)]} + e^{\lambda_n^2(\tau-t)} \le e^{\lambda_n^{2[T-(\tau-t)]}} + e^{\lambda_n^2(\tau-t)},\ t \le \tau \le T$;

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \le \sqrt{\frac{2}{p}}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T k_n(t,\tau)\left|f_n(\tau)\right|d\tau \le \sqrt{\frac{2}{p}}C_0\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\left|f_n(t)\right|dt \le \frac{1}{3}C_0C_2Tp^2.$$

Следовательно, ряд (20) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Лемма 6 доказана.

Теорема 2. *Если* $f(x,t) \in C_{x,t}^{4,0}(\overline{\Omega})$, $f(0,t) = f(p,t) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p,t) = 0$ *, то решение (18) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2)-(5).*

Доказательство . Краевые условия (2), (3) выполняются в силу свойств функции $X_n(x)$. Покажем выполнение краевых условий (4) и (5). Проверим выполнение условия (4):

$$\lim_{t\to 0}u(x,t) = -\lim_{t\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\frac{1}{2\lambda_n^2}\int_0^T k_n(t,\tau)f_n(\tau)d\tau =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\frac{1}{2\lambda_n^2}\lim_{t\to 0}\int_0^T k_n(t,\tau)f_n(\tau)d\tau.$$

Это допустимо, так как ряд сходится равномерно. Рассмотрим

$$\lim_{t\to 0}\int_0^T k_n(t,\tau)f_n(\tau)d\tau = \lim_{t\to 0}\left\{\int_0^t\frac{e^{\lambda_n^2(T-t+\tau)} + e^{\lambda_n^2(t-\tau)}}{e^{\lambda_n^2 T}-1}f_n(\tau)d\tau\right\} +$$

$$+\lim_{t\to 0}\left\{\int_t^T\frac{e^{\lambda_n^2(T-\tau+t)} + e^{\lambda_n^2(\tau-t)}}{e^{\lambda_n^2 T}-1}f_n(\tau)d\tau\right\} = \int_0^T\frac{e^{\lambda_n^2(T-\tau)} + e^{\lambda_n^2\tau}}{e^{\lambda_n^2 T}-1}f_n(\tau)d\tau. \qquad (24)$$

$$\lim_{t\to T}u(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\frac{1}{2\lambda_n^2}\lim_{t\to T}\int_0^T k_n(t,\tau)d\tau$$

$$\lim_{t\to T}\left\{\int_0^t \frac{e^{\lambda_n^2(T-t+\tau)}+e^{\lambda_n^2(t-\tau)}}{e^{\lambda_n^2 T}-1} f_n(\tau)d\tau + \int_t^T \frac{e^{\lambda_n^2(T-\tau+t)}+e^{\lambda_n^2(\tau-t)}}{e^{\lambda_n^2 T}-1} f_n(\tau)d\tau\right\} =$$

$$= \int_0^T \frac{e^{\lambda_n^2\tau}+e^{\lambda_n^2(T-\tau)}}{e^{\lambda_n^2 T}-1} f_n(\tau)d\tau . \qquad (25)$$

Сравнивая правые части (24) и (25) убеждаемся, что условие (4) выполняется. Аналогичным образом показывается, что условие (5) выполняется.

Складывая (21) и (22) мы получаем уравнение (1). Теорема 2 доказана.

Литература:

1. Каримов Д.Х., Касимова М. Смешанная задача для линейного уравнения четвертого порядка, вырождающегося на границе области // Известия АН Уз ССР. Серия физ.-мат.наук. –Т., 1968. -№ 2.
2. Байкузиев К.Б., Касимова М. Смешанная задача для нелинейного уравнения четвертого порядка, вырождающегося на границе области // Известия АН Уз ССР. Серия физ.-мат.наук. –Т., 1968. -№ 5.
3. Дезин А.А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // УМН, т. 14, № 3 (1959).
4. Салахитдинов М.С., Аманов Д. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // УзМЖ. 2005. -№ 3.
5. Аманов Д., Юлдашева А.В. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // УзМЖ. 2007.№4.
6. Аманов Д., Кадиркулов Б.Д. Краевая задача для смешанно-параболического уравнения четвертого порядка с дробными производными // УзМЖ. 2009. - №4.
7. Аманов Д., Мурзамбетова М.Б. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка со спектральным параметром // УзМЖ. 2012. -№ 3.
8. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. -Ташкент: Фан, 2000.
9. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач //Доклады АН СССР. 1969. Т. 185.-№ 4.
10. Бицадзе А.В. К теории нелокальных краевых задач // Доклады АН СССР. 1984. Т.227.№ 1.
11. Исломов Б. О локальных и нелокальных краевых задачах для уравнения смешанного типа с двумя внутренними линиями вырождения // УзМЖ. 1993. -№ 2.
12. Мирсабуров М. Задача типа задачи Бицадзе-Самарского для одного класса уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1995. -Т. 35, № 5.
13. Мирсабуров М. Нелокальная краевая задача для уравнения Геллерстедта // Мат. заметки. 2000.Т. 67. вып. 5.
14. Мирсабуров М. Нелокальная краевая задача для вырождающегося эллиптического уравнения // Дифференциальные уравнения.2002. -Т. 38, № 1.
15. Аманов Д. Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности //УзМЖ. 2016, . № 2.
16. Салахитдинов М.С., Толипов А. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа с одной и двумя линиями вырождения // Дифференциальные уравнения. 1972. -Т. 8, № 1.
17. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. – Ташкент: “Yangiyo'l poligraf servis”, 2005.
18. Салахитдинов М.С., Исломов Б. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. – Ташкент: MUMTOZ SO'Z. 2009.
19. Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной задачи // Дифференциальные уравнения. 1999. -Т. 35. - № 8.
20.Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – Москва: Наука, 1973, Часть 2.
21. Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике. Том III, – Москва: ГИТТЛ. 1947.
22. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – Москва: Наука. -1965.

(Рецензент: А.Уринов – доктор физико-математических наук, профессор).