ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

2-2021

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

Муассис: Фарғона давлат университети.

«FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ» журнали бир йилда олти марта чоп этилади.

Журнал филология, кимё ҳамда тарих фанлари бўйича Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрлар рўйхатига киритилган.

Журналдан мақола кўчириб босилганда, манба кўрсатилиши шарт.

Ўзбекистон Республикаси Президенти Администрацияси ҳузуридаги Ахборот ва оммавий коммуникациялар агентлиги томонидан 2020 йил 2 сентябрда 1109 рақами билан рўйхатга олинган.

Муқова дизайни ва оргинал макет ФарДУ таҳририят-нашриёт бўлимида тайёрланди.

Таҳририят манзили:
150100, Фарғона шаҳри, Мураббийлар кўчаси, 19-уй.
Тел.: (0373) 244-44-57. Мобил тел.: (+99891) 670-74-60
Сайт: www.fdu.uz

Босишга рухсат этилди: 02.07.2021
Қоғоз бичими: 60×84 1/8
Босма табоғи:
Офсет босма: Офсет қоғози.
Адади: 50 нусха
Буюртма № 49
ФарДУ нусха кўпайтириш бўлимида чоп этилди.
Манзил: 150100, Фарғона ш., Мураббийлар кўчаси, 19-уй.

Фарғона,
2021.

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

КИМЁ

БИОЛОГИЯ, ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИ

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ИҚТИСОДИЁТ

ТАРИХ

УДК 517.927

УЗИЛИШГА ЭГА БЎЛГАН КОЭФФИЦИЕНТЛИ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН БИР ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

Ахмаджон Қўшақович Ўринов[1], Маманазарова Феруза Фарходжон қизи[2]

[1]Ахмаджон Қўшақович Ўринов – *Фарғона давлат университети физика-математика фанлари доктори, профессор.*

[2]Маманазарова Феруза Фарҳоджон қизи – *Фарғона давлат университети магистранти.*

Аннотация

Мақолада коэффициенлари узилишга эга бўлган интегро-дифференциал тенглама учун бир чегаравий масала ўрганилган.

Аннотация

В статье исследована одна краевая задача для интегро-дифференциального уравнения с разрывными коэффициентами.

Annotation

In the article a boundary value-problem has been investigated for an integro- differential equation with discontinuous coefficients.

Таянч сўз ва иборалар: *чегаравий масала, интегро-дифференциал тенглама.*
Ключевые слова и выражения: *краевая задача, интегро-дифференциальное уравнение.*
Key words and expressions: *boundary-value problem, integro-differential equation.*

$(-1,0)\cup(0,1)$ соҳада қуйидаги кўринишдаги

$$y''(x)-\frac{sign(1-x)-sign(x)}{2}m\cdot D_{-1x}^{-\alpha}y(x)-\frac{sign(1-x)-sign(x)}{2}\cdot k\cdot D_{-1x}^{\beta}y(x)-$$
$$-\frac{sign(x)+sign(1-x)}{2}m\cdot D_{x1}^{-\alpha}y(x)-\frac{sign(x)+sign(1-x)}{2}\cdot k\cdot D_{x1}^{\beta}y(x)=0 \quad (1)$$

дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда $D_{x1}^{-\alpha}$ $\alpha,\beta,\ k,m$– берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $\alpha>0,\ 0<\beta<1,\ m>0,\ k>0$; $D_{-1x}^{-\alpha}$, $D_{x1}^{-\alpha}$ – каср тартибли интеграл операторлар [1,2]:

$$D_{-1x}^{-\alpha}y(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{\alpha-1}y(t)dt,\ D_{x1}^{-\alpha}y(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{1}(t-x)^{\alpha-1}y(t)dt,$$

D_{-1x}^{β}, D_{x1}^{β} лар эса каср тартибли дифференциал операторлар [1,2]:

$$D_{-1x}^{\beta}y(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(x-t)^{-\beta}y(t)dt,$$

$$D_{x1}^{\beta}y(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{1}(t-x)^{-\beta}y(t)dt,$$

бу ерда $\Gamma(z)$ – Эйлернинг гамма-функцияси [1].

Қаралаётган соҳада (1) тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{cases} y''(x) - mD_{-1x}^{-\alpha}y(x) - kD_{-1x}^{\beta}y(x) = 0, & x \in (-1,0), \\ y''(x) - mD_{x1}^{-\alpha}y(x) - kD_{x1}^{\beta}y(x) = 0, & x \in (0,1), \end{cases} \quad (1)$$

(1) тенглама учун қуйидаги масалани ўрганамиз:

Масала. (1) *тенгламанинг* $C^2((-1,0)\cup(0,1))\cap C^1[-1,1]$ *синфга тегишли ва*

$$y(-1) - y'(-1) = q_1, \qquad y(1) - y'(1) = q_2 \quad (2)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда q_1, q_2 *берилган ҳақиқий сонлар.*

Масалани тадқиқ қилишга ўтамиз. (1) нинг биринчи тенгламасида x ни t га алмаштириб, ҳосил бўлган тенгламани t бўйича $[-1,x]$ оралиқда интеграллаймиз:

$$y'(x) - \frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{\alpha}y(t)dt - \frac{k}{\Gamma(1-\beta)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{-\beta}y(t)dt = y'(-1), \quad x \in (-1,0)$$

.

Бу тенгламани ҳам яна $[-1,x]$ оралиқ бўйича интеграллаб ва ҳосил бўлган такрорий интегралда интеграллаш тартибини алмаштириб,

$$y(x) - \frac{m}{\Gamma(2+\alpha)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{1+\alpha}y(t)dt - \frac{k}{\Gamma(2-\beta)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{1-\beta}y(t)dt =$$
$$= y'(-1)(x+1) + y(-1), \quad x \in [-1;0].$$

интеграл тенгламага эга бўламиз. Агар бу ерда

$$\gamma = 2-\beta, \, f_1(x) = \frac{m}{\Gamma(2+\alpha)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{1+\alpha}y(t)dt + y'(-1)(x+1) + y(-1)$$

белгилашлар киритсак, охирги тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$y(x) - \frac{k}{\Gamma(\gamma)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{\gamma-1}y(t)dt = f_1(x), \qquad x \in [-1,0].$$

Бу тенгламада $f_1(x)$ ни маълум деб ҳисоблаб, $t = z-1$ ва $x = s-1$ алмаштириш бажарсак, қуйидаги интеграл тенгламага эга бўламиз:

$$y(x) = f_2(x) + \frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-1}^{x}R_1(x,t)f_2(t)dt, \qquad x \in [-1;0]. \quad (3)$$

$\gamma > 0$ бўлганлиги учун (3) тенглама ягона ечимга эга [1,2] ва у

$$y(s-1) = \frac{d}{ds}\int_{0}^{s}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(s-z)^{\gamma}\right]f_1(z-1)dz, \qquad s \in [0,1] \quad (4)$$

кўринишда аниқланади, бу ерда $\mathrm{E}_{\gamma,\delta}(z)$ – Миттаг-Леффлер функцияси [1,2]:

$$\mathrm{E}_{\gamma,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(\gamma n + \delta).$$

Эски ўзгарувчиларга қайтиб, (4) тенгликни қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$y(x) - \frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-1}^{x}y(z)dz\int_{z}^{x}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(x-t)^{\gamma}\right](t-z)^{\alpha}dt =$$

$$= y(-1)\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(x+1)^{\gamma}\right] + y'(-1)\int_{-1}^{x}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(x-t)^{\gamma}\right]dt, \qquad x\in[-1,0]. \quad (5)$$

(5) тенгламада қуйидаги белгилашларни киритиб,

$$K_1(x,z) = \int_z^x E_{\gamma,1}\left[k(x-t)^{\gamma}\right](t-z)^{\alpha}\,dt,$$

$$f_2(x) = y(-1)\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(x+1)^{\gamma}\right] + y'(-1)\int_{-1}^{x}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(x-t)^{\gamma}\right]dt,$$

уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$y(x) - \frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-1}^{x}K_1(x,z)\,y(z)\,dz = f_2(x), \qquad x\in[-1,0]. \quad (6)$$

(6) – Вольтерранинг иккинчи тур интеграл тенгламаси бўлиб, унинг ядроси ва ўнг томони узлуксиз функциялардир. Шунинг учун унинг ечими мавжуд ва ягона [3]. Бу ечимни $K_1(x,t)$ ядронинг $R_1(x,t)$ резольвентаси орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y(x) = f_2(x) + \frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-1}^{x}R_1(x,t)\,f_2(t)\,dt, \qquad x\in[-1,0]. \quad (7)$$

(1) даги иккинчи тенгламани ҳам $[x,1]$ оралиқ бўйича икки марта интеграллаймиз ва ҳосил бўлган такрорий интегралда интеграллаш тартибини алмаштириб,

$$y(x) - \frac{k}{\Gamma(2-\beta)}\int_x^1(t-x)^{1-\beta}\,y(t)\,dt =$$

$$= y(x) - y'(1)(1-x) + \frac{m}{\Gamma(2+\alpha)}\int_x^1(t-x)^{\alpha+1}\,y(t)\,dt, \qquad x\in[0,1] \quad (8)$$

интеграл тенгламага эга бўламиз. Агар бу ерда

$$\gamma = 2-\beta, \qquad \varphi_1(x) = y(1) - y'(1)(1-x) + \frac{m}{\Gamma(2+\alpha)}\int_x^1(t-x)^{\alpha+1}\,y(t)\,dt$$

белгилашлар киритсак, (8) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$y(x) - \frac{k}{\Gamma(\gamma)}\int_x^1(t-x)^{\gamma-1}\,y(t)\,dt = \varphi_1(x), \qquad x\in[0,1].$$

Бу тенгламада $\varphi_1(x)$ ни маълум функция деб ҳисоблаб, $t=1-z$ ва $x=1-s$ алмаштириш бажарсак, қуйидаги интеграл тенгламага эга бўламиз:

$$y(1-s) - \frac{k}{\Gamma(\gamma)}\int_0^s(s-z)^{\gamma-1}\,y(1-z)\,dz = \varphi_1(1-s), \qquad s\in[0,1]. \quad (9)$$

$\gamma>0$ бўлганлиги учун (9) тенглама ягона ечимга эга [1,2] ва у

$$y(1-s) = \frac{d}{ds}\int_0^s\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(s-z)^{\gamma}\right]\varphi_1(1-z)\,dz, \qquad s\in[0,1]$$

кўринишда аниқланади.

Эски ўзгарувчиларга қайтиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$y(x)+\frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^1 y(z)\,dz\int_x^z \mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(t-x)^{\gamma}\right](z-t)^{\alpha}\,dt=$$

$$y(1)\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(1-x)^{\gamma}\right]+y'(1)\int_x^1 \mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(t-x)^{\gamma}\right]dt,\qquad x\in[0,1].\qquad(10)$$

(10) тенгламада қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$K_2(x,t)=\int_x^z E_{\gamma,1}\left[k(t-x)^{\gamma}\right](z-t)^{\alpha}\,dt,$$

$$\varphi_2(x)=y(1)\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(1-x)^{\gamma}\right]+y'(1)\int_x^1 \mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(t-x)^{\gamma}\right]dt.$$

У ҳолда (10) тенглама қуйидагича кўринишни олади:

$$y(x)\frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^1 K_2(x,t)\,y(t)\,dt=\varphi_2(x),\qquad x\in[0,1].$$

Бу – Вольтерранинг иккинчи тур интеграл тенгламаси бўлиб, унинг ечими мавжуд ва ягона [2]. Бу ечимни $K_2(x,t)$ ядронинг $R_2(x,t)$ резольвентаси орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y(x)=\varphi_2(x)+\frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_x^1 R_2(x,t)\varphi_2(t)\,dt,\qquad x\in[0,1].\qquad(11)$$

(1) тенгламанинг (7) ва (11) ечимларини қўйилган масаланинг (2) чегаравий шартлари ва $y(0-0)=y(0+0)$, $y'(0-0)=y'(0+0)$ “улаш шартлари” га бўйсундирсак, $y'(-1)$ ва $y'(1)$ га нисбатан қуйидаги тенгламалар системаси келиб чиқади:

$$a_1y'(-1)-b_1y'(1)=(q_2-q_1)E_{\gamma,1}(k)+\frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 R_2(0,t)q_2E_{\gamma,1}\left[k(1-t)^{\gamma}\right]dt-$$

$$-\frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 R_1(0,t)q_1E_{\gamma,1}\left[k(1+t)^{\gamma}\right]dt,$$

$$a_2y'(-1)-b_2y'(1)=q_2\left[\frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}R_2(x,t)\bigg|_{x=0}E_{\gamma,1}\left[k(1-t)^{\gamma}\right]dt-E_{\gamma,0}(k)\right]-$$

$$-q_1\left[\frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-1}^0 \frac{\partial}{\partial x}R_1(x,t)\bigg|_{x=0}E_{\gamma,1}\left[k(1+t)^{\gamma}\right]dt+E_{\gamma,0}(k)\right],$$

бу ерда

$$a_1=E_{\gamma,1}(k)+E_{\gamma,2}(k)+\frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-1}^0 R_1(0,t)\left\{E_{\gamma,1}\left[k(1+t)^{\gamma}\right]+(t+1)E_{\gamma,2}\left[k(1+t)^{\gamma}\right]\right\}dt,$$

$$b_1=E_{\gamma,1}(k)+E_{\gamma,2}(k)+\frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1 R_2(0,t)\left\{E_{\gamma,1}\left[k(1-t)^{\gamma}\right]+(1-t)E_{\gamma,2}\left[k(1-t)^{\gamma}\right]\right\}dt,$$

$$a_2 = E_{\gamma,0}(k) + E_{\gamma,1}(k) +$$

$$+\frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-1}^{0}\frac{\partial}{\partial x}R_1(x,t)\bigg|_{x=0}\left\{E_{\gamma,1}\left[k(1+t)^{\gamma}\right]+(t+1)E_{\gamma,2}\left[k(1+t)^{\gamma}\right]\right\}dt,$$

$$b_2 = E_{\gamma,1}(k) - E_{\gamma,0}(k) +$$

$$+\frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial x}R_2(x,t)\bigg|_{x=0}\left\{E_{\gamma,1}\left[k(1-t)^{\gamma}\right]+(1-t)E_{\gamma,2}\left[k(1-t)^{\gamma}\right]\right\}dt.$$

Бу системанинг асосий детерминанти

$$\Delta = a_2 b_1 - a_1 b_2 = 2E_{\gamma,0}(k)\left\{E_{\gamma,1}(k)+E_{\gamma,2}(k)+\frac{m}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{0}^{1}R_1(0,-t)\times\right.$$

$$\left.\times\left[E_{\gamma,1}\left[k(1-t)^{\gamma}\right]+(1-t)E_{\gamma,2}\left[k(1-t)^{\gamma}\right]\right]dt\right\}$$

бўлиб, у нолдан фарқлидир. Шунинг учун юқоридаги системадан $y'(-1)$ ва $y'(1)$ ларни бир қийматли топилади. $y'(-1)$ ва $y'(1)$ ларнинг топилган қийматларини (7) ва (11) ифодаларга қўйиб, масаланиниг ечимига эга бўламиз.

Адабиётлар:

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – Москва: Физматлит, 2003. 272с.
2. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. –Тошкент: Мумтоз сўз , 2014. -164 б.
3. Salohiddinov M. Integral tenglamalar. –Toshkent: Yangiyul polygraph service, 2007. 256 b.