

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ  
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

---

---

ФАРҶОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

**FarDU.  
ILMIY  
XABARLAR-**

1995 йилдан нашр этилади  
Йилда 6 марта чиқади

6-2020

**НАУЧНЫЙ  
ВЕСТНИК.  
ФерГУ**

Издаётся с 1995 года  
Выходит 6 раз в год

<b>З.Пардаева</b>	
Шеърӣ асарда метафоризация хусусиятлари (А.Ахматова ва М.Цветаева шеърӣати мисолида).....	82
<b>З.Мамадалиева</b>	
“Ҳайрат ул-аброр” достонида Хожа-қўнгул образи ва унинг такомилӣ.....	88
<b>И.Рустамова</b>	
Бадиий ижодда деталлар функционалиги ва динамиклиги.....	94
	ТИЛШУНОСЛИК
<b>А.Бердиалиев</b>	
Эга ва унинг умумлисоний хусусиятлари ҳақида.....	98
<b>Т.Эназаров</b>	
Шеваларни илмий ҳамда амалий тадқиқ этиш назарияси ва концепцияси.....	102
<b>Ҳ.Шокирова</b>	
Шахс дейксиси имкониятлари.....	108
<b>М.Абдупаттоев, В.Абдурахмонов</b>	
Микроматн композицияси.....	116
<b>Ф.Шарипов, Т.Галиев</b>	
Ўзбек тилшунослигида сўзшакл ҳақида.....	121
<b>М.Ширинова</b>	
Кинофильмлар номлари лингвистик аспект материали сифатида.....	126
	ПЕДАГОГИКА, ПСИХОЛОГИЯ
<b>Т.Эгамбердиева, М.Зиёева</b>	
Ўзбекистон олий педагогик таълим соҳасини ривожлантиришга қаратилган ислохотлар мазмуни.....	130
<b>Ҳ.Қодирова, М.Юнусалиева</b>	
Тўғарак машғулотида мантиқий фикрлашни ривожлантириш ёрдамида ўқувчиларни олимпиадаларга тайёрлаш.....	136
	ИЛМИЙ АХБОРОТ
<b>Д.Мухторова</b>	
Ядросида Гауссинг гипергеометрик функцияси қатнашган интеграл тенгламаларни ечишнинг композицион усули ҳақида.....	141
<b>К.Кодиров, Т.Тўхтасинов</b>	
Лордания билан алгебрасидаги конвергенция топологияси.....	144
<b>М.Имомова, Б.Абдуғаниев, А.Турдибоев</b>	
Мотор ва сурков мойларининг физикавий кўрсаткичлари ва кимёвий таркибини ускунавий услубларда аниқлаш.....	148
<b>Р.Казаков</b>	
Кимё ўқитиш самарадорлигини оширишда уй кимёвий тажрибаларнинг роли.....	152
<b>М.Хакимов, А.Маруфжонов</b>	
Ўзбекистонда анор етиштиришни ривожлантириш бўйича олиб борилаётган кенг қўламли ишлар.....	156
<b>С.Исроилжонов, В.Каримов</b>	
Озиқ-овқатлар таркибидаги ксенобиотикларнинг ҳамда захарли моддаларга одам организмидаги ҳимоявий омиллар таъсирини ўрганишга кириш асослари.....	159
<b>А.Гадоев, В.Каримов, Г.Гадоева</b>	
Мушуклар организмида <i>Sarcocystis tenella</i> railliet, 1886 саркоспоридийларнинг ривожланиши.....	162
<b>М.Дадақўзиёв, О.Эркабоев</b>	
Фавқулодда вазиятларда фуқаро муҳофазаси фанини ўқитиш бўйича илғор хорижий тажрибалар.....	165
<b>Ф.Маматов</b>	
Глобаллашув жараёнида хотин-қизларни ижтимоий ҳимоя қилиш тизими самарадорлигини оширишнинг инновацион омиллари.....	168

УДК: 517.956.6

## ТОПОЛОГИЯ СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ НА ЙОРДАНОВЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ

## ЛОРДАНИЯ БАНАХ АЛГЕБРАСИДАГИ КОНВЕРЕНЦИЯ ТОПОЛОГИЯСИ

## TOPOLOGY OF CONVERGENCE ON THE JORDAN BANACH ALGEBRAS

К.Кодиров<sup>1</sup>, Т.Тўхтасинов<sup>2</sup><sup>1</sup>К.Кодиров

– ФарДУ, математика кафедраси доценти.

<sup>2</sup>Т.Тўхтасинов

– ФарДУ, 2-курс магистранти.

**Аннотация**

Мақолада  $\tau$  топологияга нисбатан алгебранинг топологик йордан алгебра эканлиги, яъни ўзгарувчилари бўйича барча алгебраик амалларнинг узлуксиз эканлиги исботланган.

**Аннотация**

В статье доказано, что алгебра относительно топологии  $\tau$  является отделимой топологической йордановой алгеброй, т.е. все алгебраические операции непрерывны по совокупности переменных.

**Annotation**

In this paper, we prove that an algebra with respect to the topology  $\tau$  is a separable topological Jordan algebra, i.e. all algebraic operations are continuous over a set of variables.

**Таянч сўз ва иборалар:** оператор, нормаль, топология, базис, спектрал ёйилма, ортогонал, симметрия, идемпотент.

**Ключевые слова и выражения:** оператор, нормальный, топология, базис, спектральное разложение, ортогональный, симметрия, идемпотент.

**Keywords and expressions:** operator, normal, topology, basis, spectral decomposition, orthogonal, symmetry, idempotent.

Пусть  $A$ -  $JBW$  – алгебра с точным нормальным полуконечным следом  $\tau$ .

**Определение.** [1] Топологией сходимости по мере на  $JBW$  – алгебре  $A$  назовем топологию, в которой базис окрестностей нуля образует множества вида  $N(\varepsilon, \delta)$ ,  $\varepsilon, \delta > 0$ , где

$$N(\varepsilon, \delta) = \{a \in A \mid \exists p \in \nabla, p^\perp \in M_\tau, \tau(p^\perp) \leq \delta, \|U_p a\| \leq \varepsilon\}.$$

Рассмотрим свойства множеств  $N(\varepsilon, \delta)$

**Теорема.** Множества  $N(\varepsilon, \delta)$  обладают следующими свойствами:

- (i)  $N(\varepsilon_1, \delta_1) + N(\varepsilon_2, \delta_2) \subset N(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$ ;
- (ii)  $\lambda N(\varepsilon, \delta) \subset N(|\lambda| \varepsilon, \delta)$ ,  $\lambda \in R$ ;
- (iii)  $(-\lambda, \lambda)x \subset N(\lambda \|x\|, \delta)$  где  $\lambda \in R$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\forall \delta > 0$ ;
- (iv)  $N^2(\varepsilon, \delta) \subset N(\varepsilon^2, 2\delta)$ , где  $N^2(\varepsilon, \delta) = \{a^2, a \in N(\varepsilon, \delta)\}$ ;
- (v)  $xN(\varepsilon, \delta) \subset N(\|x\| \varepsilon, 3\delta)$ ;
- (vi) если  $\varepsilon < 1$ , то  $N(\varepsilon, \delta) \cap \nabla = \{e \in \nabla : \tau(e) \leq \delta\}$ ;
- (vii)  $\bigcap_{\varepsilon, \delta > 0} N(\varepsilon, \delta) = \{0\}$ ;
- (viii) если  $0 \leq y \leq x \in N(\varepsilon, \delta)$ , то  $y \in N(\varepsilon, \delta)$ , т.е. все множества  $N(\varepsilon, \delta)$

заполнены.

**Доказательство.**

(i). Пусть  $x \in N(\varepsilon_1, \delta_1)$ ,  $y \in N(\varepsilon_2, \delta_2)$ , т.е. существуют  $p, q \in \nabla$  такие, что  $p^\perp, q^\perp \in M_\tau$ ,  $\tau(p^\perp) \leq \delta_1$ ,  $\tau(q^\perp) \leq \delta_2$  и  $\|U_p x\| \leq \varepsilon_1$ ,  $\|U_q y\| \leq \varepsilon_2$ .

Положим  $e = p \wedge q$ ; тогда

$$\tau(e^\perp) = \tau(p^\perp \vee q^\perp) \leq \tau(p^\perp) + \tau(q^\perp) \leq \delta_1 + \delta_2.$$

Далее, так как  $e \longleftrightarrow p$ , то  $U_e x = U_{ep} x = U_e U_p x$ . В силу положительности оператора  $U_e$  и из неравенства

$$-\varepsilon_1 \mathbf{1} \leq U_p x \leq \varepsilon_1 \mathbf{1}$$

имеем  $-\varepsilon_1 \mathbf{1} \leq U_e U_p x \leq \varepsilon_1 \mathbf{1}$ , т.е.  $\|U_e x\| \leq \varepsilon_1$ . Аналогично  $\|U_e y\| \leq \varepsilon_2$ . Следовательно,

$$\|U_e(x+y)\| \leq \|U_e x\| + \|U_e y\| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

т.е.  $x+y \in N(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$ .

(ii). Очевидно.

(iii). Пусть  $x \in A$ ,  $|\eta| < \lambda$  и  $x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d e_\lambda$  - спектральное разложение элемента  $x$ .

Тогда для  $\lambda > \|x\|$  имеем  $e_{-\lambda} = e_\lambda^\perp = 0$  и если  $e = e_{-\lambda} \vee e_\lambda^\perp$ , то  $\tau(e) = 0 < \delta \forall \delta > 0$  и  $\|U_{e^\perp} x\| \leq \|x\|$ .

Далее

$$\|U_{e^\perp}(\eta x)\| = \|U_{e^\perp} x\| \leq \lambda \|x\|.$$

(iv). Пусть  $x \in N(\varepsilon, \delta)$ , т.е. существует идемпотент

$$p \in \nabla : p^\perp \in M_\tau, \tau(p^\perp) \leq \delta, \|U_p x\| \leq \varepsilon.$$

Если  $x = x_1 + x_{1/2} + x_0$  пирсовское разложение элемента  $x$  по идемпотенту  $p$ , то

$$x_1 = U_p x, \quad x_{1/2} = 2U_{p, p^\perp} x, \quad x_0 = U_{p^\perp} x.$$

Пусть  $g = s(x_{1/2})$  - носитель компоненты  $x_{1/2}$ . Положим  $q = p \wedge g^\perp$ , тогда  $q \leq g^\perp$ , т.е.  $q \in J_0(g)$ . Так как  $g = s(x_{1/2}) = s(x_{1/2}^2)$ , то  $x_{1/2}^2 \in J_1(g)$ . Поэтому  $q x_{1/2}^2 = 0$ . Отсюда

$$\begin{aligned} U_q(x^2) &= U_q(x_1^2 + x_{1/2}^2 + x_0^2 + 2x_{1/2}(x_1 + x_0)) = \\ &= U_q x_1^2 + U_q x_{1/2}^2 = U_q x_1^2 \end{aligned}$$

В самом деле, т.к.  $q \leq p$ , то  $U_q = U_{qp} = U_q U_p$  и значит

$$U_q(J_0(p)) = U_q(J_{1/2}(p)) = \{0\}.$$

Так как

$$x_1 = U_p x, \text{ т.е. } \|x_1\| \leq \varepsilon$$

то

$$\|U_q x^2\| = \|U_q x_1^2\| \leq \|x_1^2\| = \|x_1\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Причем  $\tau(q^\perp) = \tau(p^\perp \vee g)$ . Так как  $g = s(x_{1/2})$  и  $x_{1/2} \in J_{1/2}(p) = J_{1/2}(p^\perp)$ , то по следствию леммы 2.3 из [2]  $g = P_1 + P_2$ , где  $P_1$  и  $P_2$  ортогональные идемпотенты, эквивалентные через симметрию, причем  $P_1 \leq p^\perp$ . Значит

$$\tau(q^\perp) = \tau(p^\perp \vee P_1 \vee P_2) = \tau(p^\perp \vee P_2) \leq \tau(p^\perp) +$$

$$+\tau(P_2) = \tau(p^\perp) + \tau(P_1) \leq 2\tau(p^\perp) \leq 2\delta.$$

Следовательно,  $x^2 \in N(\varepsilon^2, 2\delta)$ .

(v). Пусть  $x \in A$ ,  $y \in N(\varepsilon, \delta)$ , т.е. существует идемпотент

$$p \in \nabla, p^\perp \in M_\tau, \tau(p^\perp) \leq \delta, \|U_p y\| \leq \varepsilon.$$

Пусть  $x = x_1 + x_{1/2} + x_0$ ,  $y = y_1 + y_{1/2} + y_0$  - пирсовские разложения элементов  $x$  и  $y$  по идемпотенту  $p$ .

Положим

$$e_1 = s(x_{1/2}), e_2 = s(y_{1/2}), q = p \wedge e_1^\perp \wedge e_2^\perp.$$

В силу следствия леммы 2.3 из [2],  $e_1 = e'_1 + e''_1$ ,  $e_2 = e'_2 + e''_2$ , где  $e'_i e''_i = 0$ ,  $e'_i$  и  $e''_i$  эквивалентны через симметрию и  $e'_i \leq p^\perp$  ( $i = 1, 2$ ). Следовательно,

$$\begin{aligned} \tau(q^\perp) &= \tau(q^\perp \vee e_1 \vee e_2) = \tau(q^\perp \vee e''_1 \vee e''_2) \leq \\ &\leq \tau(q^\perp) + \tau(e''_1) + \tau(e''_2) \leq 3\tau(p^\perp) \leq 3\delta. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} U_q(xy) &= U_q U_p(x_1 y_1 + x_{1/2} y_{1/2} + x_0 y_0 + \\ &= x_{1/2}(y_0 + y_1) + (x_0 + x_1) y_{1/2}) = U_q U_p(x_1 y_1 + \\ &+ x_{1/2} y_{1/2}) = U_q(x_1 y_1 + x_{1/2} y_{1/2}). \end{aligned}$$

Но  $q \leq e_1^\perp = s(x_{1/2})^\perp$ , следовательно,  $qx_{1/2} = 0$ , т.е.  $x_{1/2} \in J_0(q)$ . Аналогично,  $y_{1/2} \in J_0(q)$  и, значит,  $x_{1/2} y_{1/2} \in J_0(q)$ , т.е.  $U_q(x_{1/2} y_{1/2}) = 0$ . Поэтому  $U_q(xy) = U_q(x_1 y_1)$ . Но  $\|x_1 y_1\| \leq \|x_1\| \|y_1\| \leq \|x\| \varepsilon$ . Итак,  $\|U_q(xy)\| \leq \|x\| \varepsilon$ ,  $\tau(q^\perp) \leq 3\delta$ , т.е.  $xy \in N(\|x\| \varepsilon, 3\delta)$ .

(vi) если  $e \in \nabla$ ,  $\tau(e) \leq \delta$ , то для  $p = \mathbf{1} - e$ :

$$\tau(p^\perp) = \tau(e) \leq \delta, U_p e = 0$$

т.е.  $e \in N(\varepsilon, \delta) \quad \forall \varepsilon > 0$ .

Обратно, пусть  $e \in N(\varepsilon, \delta)$   $\varepsilon < 1$ . Тогда существует идемпотент  $q \in \nabla$  такой, что  $q^\perp \in M_\tau$ ,  $\tau(q^\perp) \leq \delta$ ,  $\|U_q e\| \leq \varepsilon$ .

Пусть  $p = e \vee q$ , тогда  $U_q e \geq U_q p = p$ . Если  $p \neq 0$ , то  $\|p\| = 1$  и, значит  $\|U_q e\| \geq \|p\| = 1 > \varepsilon$  что невозможно. Следовательно,  $p = 0$ . Так как идемпотенты  $e \vee q - q$  и  $e - e \wedge q = e$  эквивалентны через симметрию, то

$$\tau(e) = \tau(e \vee q - q) \leq \tau(\mathbf{1} - q) \leq \delta.$$

Следовательно,

$$N(\varepsilon, \delta) \cap \nabla = \{e \in \nabla, \tau(e) \leq \delta\}$$

при  $\varepsilon < 1$ .

(vii). Пусть

$$x \in \bigcap_{\varepsilon, \delta > 0} N(\varepsilon, \delta), \quad x \neq 0,$$

тогда в силу (iv)  $x \in \bigcap_{\varepsilon, \delta > 0} N(\varepsilon, \delta)$ . Существует число  $\eta > 0$  и идемпотент

$e \in \nabla$ ,  $e \longleftrightarrow x^2$ ,  $e \neq 0$  такие, что  $x^2 \geq \eta e$ . Пусть  $\delta < \tau(e)$ ,  $\varepsilon < \eta$  произвольны. Так как  $x^2 \in N(\varepsilon, \delta)$ , то существует  $p \in \nabla$ ,

$$p^\perp \in M_\tau, \tau(p^\perp) \leq \delta, \|U_p x^2\| \leq \varepsilon.$$

В силу положительности оператора  $U_p$  имеем

$$0 \leq U_p(\eta e) \leq U_p x^2,$$

т.е.  $\eta \|U_p e\| \leq \varepsilon$ . Значит

$$\|U_p e\| \leq \frac{\varepsilon}{\eta} < 1.$$

Отсюда, как и в (vi) вытекает, что  $p \wedge e = 0$ , т.е.  $\tau(e) \leq \tau(\mathbf{1} - p) \leq \delta$ . Это противоречит выбору  $\delta$ . Следовательно,  $x=0$ .

Свойство (viii) очевидно. Теорема доказана.

Топологию сходимости по мере обозначим через  $t$ . Пусть  $\widehat{A}$  - пополнение  $A$  в топологии  $t$ .

**Следствие.** Алгебра  $\widehat{A}$  относительно топологии  $t$  является отделимой топологической йордановой алгеброй, т.е. все алгебраические операции непрерывны по совокупности переменных.

#### Литература:

1. Аюпов Ш.А. Топологические частично упорядоченные йордановы алгебры. УМН, 1980, т.35, вып.3 (213).
2. Аюпов Ш.А. Интегрирование на йордановых алгебрах. Известия АН, 1983, т.47, -№1.

(Рецензент: А.Уринов — доктор физико-математических наук, профессор).