ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

6-2020

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

УДК: 517.956.6

ТОПОЛОГИЯ СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ НА ЙОРДАНОВЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ

ЛОРДАНИЯ БАНАН АЛГЕБРАСИДАГИ КОНВЕРЕНЦИЯ ТОПОЛОГИЯСИ

TOPOLOGY OF CONVERGECE ON THE JORDAN BANACH ALGEBRAS

К.Кодиров[1], Т.Тўхтасинов[2]

[1]**К.Кодиров** – *ФарДУ, математика кафедраси доценти.*
[2]**Т.Тўхтасинов** – *ФарДУ, 2-курс магистранти.*

Аннотация

Мақолада τ топологияга нисбатан алгебранинг топологик йордан алгебра эканлиги, яъни ўзгарувчилари бўйича барча алгебраик амалларнинг узлуксиз эканлиги исботланган.

Аннотация

В статье доказано, что алгебра относительно топологии τ является отделимой топологической йордановой алгеброй, т.е. все алгебраические операции непрерывны по совокупности переменных.

Annotation

In this paper, we prove that an algebra with respect to the topology τ is a separable topological Jordan algebra, i.e. all algebraic operations are continuous over a set of variables.

Таянч сўз ва иборалар: *оператор, нормаль, топология, базис, спектрал ёйилма, ортогонал, симметрия, идемпотент.*

Ключевые слова и выражения: *оператор, нормалный, топология, базис, спектральное разложение, ортогональный, симметрия, идемпотент.*

Keywords and expressions: *operator, normal, topology, basis, spectral decomposition, orthogonal, symmetry, idempotent.*

Пусть *A*- *JBW* – алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ.

Определение. [1] Топологией сходимости по мере на *JBW* – алгебре *A* назовем топологию, в которой базис окрестностей нуля образует множества вида $N(\varepsilon,\delta),\ \ \varepsilon,\delta>0$, где

$$N(\varepsilon,\delta)=\left\{a\in A\,|\,\exists p\in\nabla,\ p^{\perp}\in M_{\tau},\ \tau(p^{\perp})\le\delta,\ \|\,U_p a\,\|\le\varepsilon\right\}.$$

Рассмотрим свойства множеств $N(\varepsilon,\delta)$

Теорема. Множества $N(\varepsilon,\delta)$ обладают следующими свойствами:

(i) $N(\varepsilon_1,\delta_1)+N(\varepsilon_2,\delta_2)\subset N(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\delta_1+\delta_2)$;

(ii) $\lambda N(\varepsilon,\delta)\subset N(|\lambda|\,\varepsilon,\delta),\ \ \lambda\in R$;

(iii) $(-\lambda,\lambda)x\subset N(\lambda\|x\|,\delta)$ где $\lambda\in R,\ \lambda\ge 0,\ \forall\delta>0$;

(iv) $N^2(\varepsilon,\delta)\subset N(\varepsilon^2,2\delta)$, где $N^2(\varepsilon,\delta)=\{a^2, a\in N(\varepsilon,\delta)\}$;

(v) $xN(\varepsilon,\delta)\subset N(\|x\|\,\varepsilon,3\delta)$;

(vi) если $\varepsilon<1$, то $N(\varepsilon,\delta)\cap\nabla=\{e\in\nabla:\tau(e)\le\delta\}$;

(vii) $\bigcap\limits_{\varepsilon,\delta>0}N(\varepsilon,\delta)=\{0\}$;

(viii) если $0\le y\le x\in N(\varepsilon,\delta)$, то $y\in N(\varepsilon,\delta)$, т.е. все множества $N(\varepsilon,\delta)$ заполнены.

Доказательство.

(*i*).Пусть $x\in N(\varepsilon_1,\delta_1),\ y\in N(\varepsilon_2,\delta_2)$, т.е. существуют $p,q\in\nabla$ такие, что $p^{\perp},q^{\perp}\in M_{\tau},\ \tau(p^{\perp})\le\delta_1,\ \tau(q^{\perp})\le\delta_2$ и $\|U_p x\|\le\varepsilon_1,\ \|U_q y\|\le\varepsilon_2$.

Положим $e = p \wedge q$; тогда

$$\tau(e^{\perp}) = \tau(p^{\perp} \vee q^{\perp}) \le \tau(p^{\perp}) + \tau(q^{\perp}) \le \delta_1 + \delta_2.$$

Далее, так как $e \longleftrightarrow p$, то $U_e x = U_{ep} x = U_e U_p x$. В силу положительности оператора U_e и из неравенства

$$-\varepsilon_1 \mathbf{1} \le U_p x \le \varepsilon_1 \mathbf{1}$$

имеем $-\varepsilon_1 \mathbf{1} \le U_e U_p x \le \varepsilon_1 \mathbf{1}$, т.е. $\| U_e x \| \le \varepsilon_1$. Аналогично $\| U_e y \| \le \varepsilon_2$. Следовательно,

$$\| U_e (x+y) \| \le \| U_e x \| + \| U_e y \| \le \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

т.е. $x + y \in N(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$.

(*ii*). Очевидно.

(*iii*).Пусть $x \in A,\ \ |\eta| < \lambda$ и $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_{\lambda}$ - спектральное разложение элемента *x*. Тогда для $\lambda > \| x \|$ имеем $e_{-\lambda} = e_{\lambda}^{\perp} = 0$ и если $e = e_{-\lambda} \vee e_{\lambda}^{\perp}$, то $\tau(e) = 0 < \delta\ \forall \delta > 0$ и $\| U_{e^{\perp}} x \| \le \| x \|$.

Далее

$$\| U_{e^{\perp}} (\eta x) \| = \| U_{e^{\perp}} x \| \le \lambda \| x \|.$$

(*iv*). Пусть $x \in N(\varepsilon, \delta)$, т.е. существует идемпотент

$$p \in \nabla : p^{\perp} \in M_{\tau},\ \ \tau(p^{\perp}) \le \delta,\ \ \| U_p x \| \le \varepsilon.$$

Если $x = x_1 + x_{1/2} + x_0$ пирсовское разложение элемента *x* по идемпотенту *p*, то

$$x_1 = U_p x,\quad x_{1/2} = 2U_{p,p^{\perp}} x,\quad x_0 = U_{p^{\perp}} x.$$

Пусть $g = s(x_{1/2})$ - носитель компоненты $x_{1/2}$. Положим $q = p \wedge g^{\perp}$, тогда $q \le g^{\perp}$, т.е. $q \in J_0(g)$. Так как $g = s(x_{1/2}) = s(x_{1/2}^2)$, то $x_{1/2}^2 \in J_1(g)$. Поэтому $q x_{1/2}^2 = 0$. Отсюда

$$U_q(x^2) = U_q(x_1^2 + x_{1/2}^2 + x_0^2 + 2x_{1/2}(x_1 + x_0)) =$$
$$= U_q x_1^2 + U_q x_{1/2}^2 = U_q x_1^2$$

В самом деле, т.к. $q \le p$, то $U_q = U_{qp} = U_q U_p$ и значит

$$U_q(J_0(p)) = U_q(J_{1/2}(p)) = \{0\}.$$

Так как

$$x_1 = U_p x \text{, т.е. } \| x_1 \| \le \varepsilon$$

то

$$\| U_q x^2 \| = \| U_q x_1^2 \| \le \| x_1^2 \| = \| x_1 \|^2 \le \varepsilon^2.$$

Причем $\tau(q^{\perp}) = \tau(p^{\perp} \vee g)$. Так как $g = s(x_{1/2})$ и $x_{1/2} \in J_{1/2}(p) = J_{1/2}(p^{\perp})$, то по следствию леммы 2.3 из [2] $g = P_1 + P_2$, где P_1 и P_2 ортогональные идемпотенты, эквивалентные через симметрию, причем $P_1 \le p^{\perp}$. Значит

$$\tau(q^{\perp}) = \tau(p^{\perp} \vee P_1 \vee P_2) = \tau(p^{\perp} \vee P_2) \le \tau(p^{\perp}) +$$

$$+\tau(P_2)=\tau(p^{\perp})+\tau(P_1)\le 2\tau(p^{\perp})\le 2\delta .$$

Следовательно, $x^2\in N(\varepsilon^2,2\delta)$.

(*v*). Пусть $x\in A,\quad y\in N(\varepsilon,\delta)$, т.е. существует идемпотент

$$p\in\nabla,\ p^{\perp}\in M_{\tau},\ \tau(p^{\perp})\le\delta,\ \|U_p y\|\le\varepsilon .$$

Пусть $x=x_1+x_{1/2}+x_0,\quad y=y_1+y_{1/2}+y_0$ - пирсовские разложения элементов *x* и *y* по идемпотенту *p*.

Положим

$$e_1=s(x_{1/2}),\ e_2=s(y_{1/2}),\ q=p\wedge e_1^{\perp}\wedge e_2^{\perp} .$$

В силу следствия леммы 2.3 из [2], $e_1=e_1'+e_1'',\quad e_2=e_2'+e_2''$, где $e_i'\,e_i''=0,\quad e_i'$ и e_i'' эквивалентны через симметрию и $e_i'\le p^{\perp}\quad (i=1,2)$. Следовательно,

$$\tau(q^{\perp})=\tau(q^{\perp}\vee e_1\vee e_2)=\tau(q^{\perp}\vee e_1''\vee e_2'')\le$$
$$\le\tau(q^{\perp})+\tau(e_1'')+\tau(e_2'')\le 3\tau(p^{\perp})\le 3\delta .$$

Далее,

$$U_q(xy)=U_qU_p(x_1y_1+x_{1/2}y_{1/2}+x_0y_0+$$
$$=x_{1/2}(y_0+y_1)+(x_0+x_1)y_{1/2})=U_qU_p(x_1y_1+$$
$$+x_{1/2}y_{1/2})=U_q(x_1y_1+x_{1/2}y_{1/2}).$$

Но $q\le e_1^{\perp}=s(x_{1/2})^{\perp}$, следовательно, $qx_{1/2}=0$, т.е. $x_{1/2}\in J_0(q)$. Аналогично, $y_{1/2}\in J_0(q)$ и, значит, $x_{1/2}y_{1/2}\in J_0(q)$, т.е. $U_q(x_{1/2}y_{1/2})=0$. Поэтому $U_q(xy)=U_q(x_1y_1)$. Но $\|x_1y_1\|\le\|x_1\|\|y_1\|\le\|x\|\varepsilon$. Итак, $\|U_q(xy)\|\le\|x\|\varepsilon,\ \tau(q^{\perp})\le 3\delta$, т.е $xy\in N(\|x\|\varepsilon,3\delta)$.

(*vi*) если $e\in\nabla,\ \tau(e)\le\delta$, то для $p=\mathbf{1}-e$:

$$\tau(p^{\perp})=\tau(e)\le\delta,\quad U_pe=0$$

т.е. $e\in N(\varepsilon,\delta)\quad\forall\varepsilon>0$.

Обратно, пусть $e\in N(\varepsilon,\delta)\quad\varepsilon<1$. Тогда существует идемпотент $q\in\nabla$ такой, что $q^{\perp}\in M_{\tau}$, $\tau(q^{\perp})\le\delta,\quad\|U_qe\|\le\varepsilon$.

Пусть $p=e\vee q$, тогда $U_qe\ge U_qp=p$. Если $p\ne 0$, то $\|p\|=1$ и, значит $\|U_qe\|\ge\|p\|=1>\varepsilon$ что невозможно. Следовательно, *p=0*. Так как идемпотенты $e\vee q-q$ и $e-e\wedge q=e$ эквивалентны через симметрию, то

$$\tau(e)=\tau(e\vee q-q)\le\tau(\mathbf{1}-q)\le\delta .$$

Следовательно,

$$N(\varepsilon,\delta)\cap\nabla=\{e\in\nabla,\tau(e)\le\delta\}$$

при $\varepsilon<1$.

(*vii*). Пусть

$$x\in\bigcap_{\varepsilon,\delta>0}N(\varepsilon,\delta),\quad x\ne 0,$$

тогда в силу (*iv*) $x \in \bigcap_{\varepsilon,\delta>0} N(\varepsilon,\delta)$. Существует число $\eta > 0$ и идемпотент $e \in \nabla,\ e \longleftrightarrow x^2,\ \ e \neq 0$ такие, что $x^2 \geq \eta e$. Пусть $\delta < \tau(e),\ \varepsilon < \eta$ произвольны. Так как $x^2 \in N(\varepsilon,\delta)$, то существует $p \in \nabla$,

$$p^{\perp} \in M_{\tau},\ \tau(p^{\perp}) \leq \delta,\ \ \| U_p x^2 \| \leq \varepsilon .$$

В силу положительности оператора U_p имеем

$$0 \leq U_p(\eta e) \leq U_p x^2 ,$$

т.е. $\eta \| U_p e \| \leq \varepsilon$. Значит

$$\| U_p e \| \leq \frac{\varepsilon}{\eta} < 1 .$$

Отсюда, как и в (*vi*) вытекает, что $p \wedge e = 0$, т.е. $\tau(e) \leq \tau(\mathbf{1} - p) \leq \delta$. Это противоречит выбору δ. Следовательно, *x=0*.

Свойство (*viii*) очевидно. Теорема доказана.

Топологию сходимости по мере обозначим через *t*. Пусть $\widehat{A}$ - пополнение *A* в топологии *t*.

Следствие. Алгебра $\widehat{A}$ относительно топологии *t* является отделимой топологической йордановой алгеброй, т.е. все алгебраические операции непрерывны по совокупности переменных.

Литература:

1. Аюпов Ш.А. Топологические частично упорядоченные йордановы алгебры. УМН, 1980, т.35, вып.3 (213).
2. Аюпов Ш.А. Интегрирование на йордановых алгебрах. Известия АН, 1983, т.47, -№1.

(Рецензент: А.Уринов — доктор физико-математических наук, профессор).