

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ  
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

---

---

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

**FarDU.  
ILMIY  
XABARLAR-**

1995 йилдан нашр этилади  
Йилда 6 марта чиқади

6-2020

**НАУЧНЫЙ  
ВЕСТНИК.  
ФерГУ**

Издаётся с 1995 года  
Выходит 6 раз в год

<b>З.Пардаева</b>	
Шеърӣ асарда метафоризация хусусиятлари (А.Ахматова ва М.Цветаева шеърӣати мисолида).....	82
<b>З.Мамадалиева</b>	
“Ҳайрат ул-аброр” достонида Хожа-қўнгул образи ва унинг такомилӣ.....	88
<b>И.Рустамова</b>	
Бадиий ижодда деталлар функционалиги ва динамиклиги.....	94
	ТИЛШУНОСЛИК
<b>А.Бердиалиев</b>	
Эга ва унинг умумлисоний хусусиятлари ҳақида.....	98
<b>Т.Эназаров</b>	
Шеваларни илмий ҳамда амалий тадқиқ этиш назарияси ва концепцияси.....	102
<b>Ҳ.Шокирова</b>	
Шахс дейксиси имкониятлари.....	108
<b>М.Абдупаттоев, В.Абдурахмонов</b>	
Микроматн композицияси.....	116
<b>Ф.Шарипов, Т.Галиев</b>	
Ўзбек тилшунослигида сўзшакл ҳақида.....	121
<b>М.Ширинова</b>	
Кинофильмлар номлари лингвистик аспект материали сифатида.....	126
	ПЕДАГОГИКА, ПСИХОЛОГИЯ
<b>Т.Эгамбердиева, М.Зиёева</b>	
Ўзбекистон олий педагогик таълим соҳасини ривожлантиришга қаратилган ислохотлар мазмуни.....	130
<b>Ҳ.Қодирова, М.Юнусалиева</b>	
Тўғарак машғулотида мантиқий фикрлашни ривожлантириш ёрдамида ўқувчиларни олимпиадаларга тайёрлаш.....	136
	ИЛМИЙ АХБОРОТ
<b>Д.Мухторова</b>	
Ядросида Гауссинг гипергеометрик функцияси қатнашган интеграл тенгламаларни ечишнинг композицион усули ҳақида.....	141
<b>К.Кодиров, Т.Тўхтасинов</b>	
Лордания билан алгебрасидаги конвергенция топологияси.....	144
<b>М.Имомова, Б.Абдуғаниев, А.Турдибоев</b>	
Мотор ва сурков мойларининг физикавий кўрсаткичлари ва кимёвий таркибини ускунавий услубларда аниқлаш.....	148
<b>Р.Казаков</b>	
Кимё ўқитиш самарадорлигини оширишда уй кимёвий тажрибаларнинг роли.....	152
<b>М.Ҳакимов, А.Маруфжонов</b>	
Ўзбекистонда анор етиштиришни ривожлантириш бўйича олиб борилаётган кенг қўламли ишлар.....	156
<b>С.Исроилжонов, В.Каримов</b>	
Озиқ-овқатлар таркибидаги ксенобиотикларнинг ҳамда захарли моддаларга одам организмидаги ҳимоявий омиллар таъсирини ўрганишга кириш асослари.....	159
<b>А.Гадоев, В.Каримов, Г.Гадоева</b>	
Мушуклар организмида <i>Sarcocystis tenella</i> railliet, 1886 саркоспоридийларнинг ривожланиши.....	162
<b>М.Дадақўзиев, О.Эркабоев</b>	
Фавқулодда вазиятларда фуқаро муҳофазаси фанини ўқитиш бўйича илғор хорижий тажрибалар.....	165
<b>Ф.Маматов</b>	
Глобаллашув жараёнида хотин-қизларни ижтимоий ҳимоя қилиш тизими самарадорлигини оширишнинг инновацион омиллари.....	168

ЯДРОСИДА ГАУССНИНГ ГИПЕРГЕОМЕТРИК ФУНКЦИЯСИ ҚАТНАШГАН ИНТЕГРАЛ  
ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШНИНГ КОМПОЗИЦИОН УСУЛИ ҲАҚИДА

О КОМПОЗИЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С  
ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ЯДРЕ

ABOUT A COMPOSITIONAL METHOD OF SOLVING INTEGRAL EQUATIONS WITH  
GAUSS'S HYPERGEOMETRIC FUNCTION IN THE KERNEL

Д.Мухторова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Д.Мухторова

– ФарДУ, магистратура бўлими дифференциал  
тенгламалар ва математик физика  
мутахассислиги 2-курс магистранти.

**Аннотация**

Мақолада ядросида Гауссинг гипергеометрик функцияси иштирок этган интеграл тенгламаларни интегро-дифференциал операторлар ва уларнинг баъзи композициялари ёрдамида ечиш кўрсатилган.

**Аннотация**

В данной статье представлено решение интегральных уравнений с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре с использованием интегро-дифференциальных операторов и некоторых их композиций.

**Annotation**

This article presents the solution of integral equations involving Gauss's hypergeometric function at the kernel using integro-differential operators and some of their compositions.

**Таянч сўз ва иборалар:** интеграл тенгламалар, интегро-дифференциал операторлар, ярим гуруҳ хоссалари, гипергеометрик функция, композицион усул, Риман-Лиувиллнинг интеграл операторлари.

**Ключевые слова и выражения:** интегральные уравнения, интегро-дифференциальные операторы, полугрупповые свойства, гипергеометрическая функция, композиционный метод, интегральные операторы Римана-Лиувилля.

**Keywords and expressions:** integral equations, integro-differential operators, semi-group properties, hypergeometric function, compositional method, Riemann-Liouville integral operators.

Мазкур ишда ядросида Гауссинг гипергеометрик функцияси қатнашган ушбу

$$\int_e^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x}{\tau}\right) \varphi(\tau) d\tau = g(x), \quad 0 \leq e < x < d \leq \infty \quad (1)$$

тенгламани каср тартибли интегро-дифференциал операторлар ёрдамида ечишни кўриб чиқамиз. Шу сабабли куйидаги Риманн-Лиувиллнинг [1]

$$\begin{cases} I_{a+}^{\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, & x > a, \\ I_{a-}^{\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, & x < b, \end{cases} \quad (2)$$

каср тартибли интеграл операторлари композициясидан ва ушбу

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} \varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta} \varphi, \quad I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} \varphi = I_{b-}^{\alpha+\beta} \varphi, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (3)$$

каср тартибли интегралларнинг ярим гуруҳ хоссаларидан фойдаланамиз.

**Теорема.** Ушбу  $f(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_1)$ ,  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  учун

$$f_{n-\alpha}(x) = I_{a+}^{n-\alpha} f \in AC^n([a, b]) \quad (4)$$

бўлиши зарур ва етарли, бу ерда  $n = [\operatorname{Re} \alpha] + 1$ ,  $I_{a+}^{\alpha}(L_1)$  – каср тартибли Риманн-Лиувилл интегралли кўринишини ифодаловчи жамланувчи (интегралланувчи) функциялар синфи,

$AC^n([a, b]) - [a, b]$  кесмада  $n -$  тартибли ҳосиласигача абсолют узлуксиз функциялар синфи ва

$$f_{n-\alpha}^k(a) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1. \quad (5)$$

Исбот. *Зарурийлиги.*  $f = I_{a+}^\alpha \varphi$ ,  $\varphi \in L_1(a, b)$  бўлсин. (3) каср тартибли интегралларнинг ярим гуруҳ хоссаси  $I_{a+}^{n-\alpha} f = I_{a+}^n \varphi$ ,  $\varphi \in L_1(a, b)$  ва (4), (5) шартларнинг бажарилиши Абел интеграл тенгламаси ечимининг мавжуд ва ягоналиги ҳақидаги леммага асосан келиб чиқади.

*Етарлилиги.* (3) ва (4) шартларининг бажарилишидан  $f_{n-\alpha}(x)$  ни Абел интеграл тенгламаси ечимининг мавжуд ва ягоналиги ҳақидаги лемма [1] ёрдамида  $f_{n-\alpha}(x) = I_{a+}^n \varphi$  кўринишида ифодалаш мумкин, бу ерда  $\varphi \in L_1(a, b)$ . Демак, каср тартибли интегралларнинг ярим гуруҳ хоссасига кўра  $I_{a+}^{n-\alpha} f = I_{a+}^n \varphi = I_{a+}^{n-\alpha} I_{a+}^\alpha \varphi$  бўлади. Бу ердан эса  $I_{a+}^{n-\alpha} (f - I_{a+}^\alpha \varphi) = 0$  эканлиги келиб чиқади. Абел типидagi тенглама ҳақидаги леммага [1] кўра  $f - I_{a+}^\alpha \varphi = 0$ , чунки  $\text{Re}(n - \alpha) > 0$ . Теорема исботланди.

Ушбу теорема каср тартибли интегралларни ва каср тартибли ҳосилаларни ҳисоблашда анчагина қулайлик туғдиради. Буни билган ҳолда берилган (1) тенгламамизни интегро-дифференциал операторлар ёрдамида қуйидаги

$$I_{0+}^c \varphi(x) \equiv \int_0^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x}{\tau}\right) \varphi(\tau) d\tau \quad (6)$$

кўринишини исботлаймиз. Келтирилган теорема ва ушбу

$$I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f(x) = I_{a+}^\beta I_{a+}^\alpha f(x), \quad I_{a+}^\beta I_{a+}^\alpha f(x) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x) \quad (7)$$

$$I_{b-}^\alpha I_{b-}^\beta f(x) = I_{b-}^\beta I_{b-}^\alpha f(x), \quad I_{b-}^\beta I_{b-}^\alpha f(x) = I_{b-}^{\alpha+\beta} f(x) \quad (8)$$

хоссалардан фойдаланиб, операторлар композициясини ҳосил қиламиз. (7) формулада  $a = 0$ , (8) да эса  $b = \infty$  алмаштиришлар бажарсак,

$$x^a I_{0+}^\beta x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^\alpha x^\beta f(x) = I_{0+}^\alpha I_{0+}^\beta f(x) = I_{0+}^{\alpha+\beta} f(x), \quad (9)$$

$$x^a I_{-}^\beta x^{-\alpha-\beta} I_{-}^\alpha x^\beta f(x) = I_{-}^\alpha I_{-}^\beta f(x) = I_{-}^{\alpha+\beta} f(x).$$

муносабатга эга бўламиз. Келтирилган маълумотлар асосида ушбу операторлар тенглиги келиб чиқади:

$$I_{0+}^c \varphi(x) = I_{0+}^{c-b} x^{-a} I_{0+}^b x^a \varphi(x), \quad I_{0+}^c \varphi(x) = x^a I_{0+}^b x^{-a} I_{0+}^{c-b} \varphi(x). \quad (10)$$

Операторларнинг ёйилмасини қўйиб ва интеграллаш тартибини ўзгартириш ҳақидаги Дирихле формуласини қўлласак,

$$\begin{aligned} I_{0+}^{c-b} x^{-a} I_{0+}^b x^a \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(c-b)} \int_0^x (x-\eta)^{c-b-1} (\eta^{-a} I_{0+}^b \eta^a \varphi(\eta)) d\eta = \\ &= \frac{1}{\Gamma(c-b)} \int_0^x (x-\eta)^{c-b-1} \eta^{-a} d\eta \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\eta (\eta-\tau)^{b-1} \tau^a \varphi(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^x \tau^a \varphi(\tau) d\tau \times \\ &\times \int_\tau^x \eta^{-a} (\eta-\tau)^{b-1} (x-\eta)^{c-b-1} d\eta \end{aligned}$$

тенглик ҳосил бўлади. Ички интегралда  $\eta = \tau + (x - \tau)\zeta$  алмаштириш бажариб, гипергеометрик функциянинг интеграл кўринишидан [2]

фойдаланамиз:  $\int_\tau^x \eta^{-a} (\eta-\tau)^{b-1} (x-\eta)^{c-b-1} d\eta = (x-\tau)^{c-1} \tau^{-a} \int_0^1 \zeta^{b-1} (1-\zeta)^{c-b-1} \left(1 - \frac{\tau-x}{\tau} \zeta\right)^{-a} d\zeta =$

$$= \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} (x-\tau)^{c-1} \tau^{-a} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x}{\tau}\right).$$

Шундай қилиб,

$$I_{0+}^{c-b} x^{-a} I_{0+}^b x^a \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(c)} \int_0^x (x-\tau)^{c-1} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x}{\tau}\right) \varphi(\tau) d\tau \quad I_{0+}^{c-b} x^{-a} I_{0+}^b x^a \varphi(x) = I_{0+}^c \varphi(x).$$

Агар (1) тенгламанинг ўнг томони —  $g(x)$  функция қаралаётган ораликда олинса,

$$\int_0^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x}{\tau}\right) \varphi(\tau) d\tau = g(x), \quad I_{0+}^c \varphi(x) = g(x)$$

муносабатлар ўринли бўлиб,

$$\varphi(x) = x^{-a} I_{e+}^{-b} x^a I_{e+}^{b-c} g(x) \quad (11)$$

(1) тенгламанинг ечимига эга бўламиз.

Ушбу ечимнинг интеграл кўринишини келтириб чиқарамиз. Қидирилаётган интеграл кўринишни (11) ечим, (7), (8) операторлар ва шу каби композициялардан фойдаланиб келтириб чиқариш мумкин. Шу мақсадда (11) ечимни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\varphi(x) = x^{-a} \left(\frac{d}{dx}\right)^m x^a x^{-a} I_{e+}^{m-b} x^a I_{e+}^{(m-c)-(m-b)} g(x).$$

Бу ифодани (11) формулага қўйсақ, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$I_{0+}^c \varphi(x) = x^a I_{e+}^b x^{-a} I_{e+}^{c-b} x^{-a} \left(\frac{d}{dx}\right)^m x^a x^{-a} I_{e+}^{m-b} x^a I_{e+}^{(m-c)-(m-b)} g(x),$$

$$\varphi(x) = x^{-a} \frac{d^m}{dx^m} \left\{ x^a x^{-a} I_{e+}^{m-b} x^a I_{e+}^{(m-c)-(m-b)} g(x) \right\} = x^{-a} \frac{d^m}{dx^m} \times \\ \times \left\{ \int_e^x \frac{(x-\eta)^{m-b-1}}{\Gamma(m-b)} \eta^a d\eta \int_e^\eta \frac{(\eta-\tau)^{(m-c)-(m-b)-1}}{\Gamma(b-c)} g(\tau) d\tau \right\}$$

Ички интегралга Дирихле формуласини қўллаб ва алмаштириб бажарсак,

$$\int_e^x \frac{g(\tau) d\tau}{\Gamma(m-b)\Gamma(b-c)} \int_\tau^x \eta^a (x-\eta)^{m-b-1} (\eta-\tau)^{(m-c)-(m-b)-1} d\eta = \\ = x^a (x-\tau)^{m-c-1} \int_0^1 s^{m-b-1} (1-s)^{(m-c)-(m-b)-1} \left(1 - \left(1 - \frac{\tau}{x}\right)\right)^a ds$$

тенгликка эга бўламиз. Топилган ифодани ўрнига олиб бориб қўйсақ, биз излаётган ечимнинг интеграл кўриниши ҳосил бўлади:

$$\varphi(x) = x^{-a} \frac{d^m}{dx^m} \left\{ x^a \int_e^x \frac{(x-\tau)^{m-c-1}}{\Gamma(m-c)} {}_2F_1\left(-a, m-b; m-c; 1 - \frac{\tau}{x}\right) g(\tau) d\tau \right\}, \quad (12)$$

$$0 < \operatorname{Re} c < m, \quad g \in I_{e+}^c (L_{p,*}(e, d)).$$

**Адабиётлар:**

1. Самко С.Г., Кильбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – М.: Наука, 1987.
2. Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар. – Фарғона: “Фарғона” нашриёти, 2012.

(Тақризчи: А.Ўринов — физика-математика фанлари доктори, профессор).