ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

6-2020

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

ТИЛШУНОСЛИК

ПЕДАГОГИКА, ПСИХОЛОГИЯ

ИЛМИЙ АХБОРОТ

УДК: 517.95

ЯДРОСИДА ГАУССНИНГ ГИПЕРГЕОМЕТРИК ФУНКЦИЯСИ ҚАТНАШГАН ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШНИНГ КОМПОЗИЦИОН УСУЛИ ҲАҚИДА

О КОМПОЗИЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ЯДРЕ

ABOUT A COMPOSITIONAL METHOD OF SOLVING INTEGRAL EQUATIONS WITH GAUSS'S HYPERGEOMETRIC FUNCTION IN THE KERNEL

Д.Мухторова[1]

[1] **Д.Мухторова** – *ФарДУ, магистратура бўлими дифференциал тенгламалар ва математик физика мутахассислиги 2-курс магистранти.*

Аннотация

Мақолада ядросида Гаусснинг гипергеометрик функцияси иштирок этган интеграл тенгламаларни интегро-дифференциал операторлар ва уларнинг баъзи композициялари ёрдамида ечиш кўрсатилган.

Аннотация

В данной статье представлено решение интегральных уравнений с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре с использованием интегро-дифференциальных операторов и некоторых их композиций.

Annotation

This article presents the solution of integral equations involving Gauss's hypergeometric function at the kernel using integro-differential operators and some of their compositions.

Таянч сўз ва иборалар: *интеграл тенгламалар, интегро-дифференциал операторлар, ярим гуруҳ хоссалари, гипергеометрик функция, композицион усул, Риман-Лиувиллнинг интеграл операторлари.*

Ключевые слова и выражения: *интегральные уравнения, интегро-дифференциальные операторы, полугрупповые свойства, гипергеометрическая функция, композиционный метод, интегральные операторы Римана-Лиувилля.*

Keywords and expressions: *integral equations, integro-differential operators, semi-group properties, hypergeometric function, compositional method, Riemann-Liouville integral operators.*

Мазкур ишда ядросида Гаусснинг гипергеометрик функцияси қатнашган ушбу

$$\int_e^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{x}{\tau}\right)\varphi(\tau)\,d\tau = g(x),\ 0\le e<x<d\le\infty \tag{1}$$

тенгламани каср тартибли интегро-дифференциал операторлар ёрдамида ечишни кўриб чиқамиз. Шу сабабли қуйидаги Риманн-Лиувиллнинг [1]

$$\begin{cases} I_{a+}^{\alpha}\varphi(x)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, & x>a, \\ I_{a-}^{\alpha}\varphi(x)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt, & x<b, \end{cases} \tag{2}$$

каср тартибли интеграл операторлари композициясидан ва ушбу

$$I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi=I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi,\quad I_{b-}^{\alpha}I_{b-}^{\beta}\varphi=I_{b-}^{\alpha+\beta}\varphi,\quad \alpha>0,\ \beta>0 \tag{3}$$

каср тартибли интегралларнинг ярим гуруҳ хоссаларидан фойдаланамиз.

Теорема. Ушбу $f(x)\in I_{a+}^{\alpha}(L_1),\ \mathrm{Re}(\alpha)>0$ учун

$$f_{n-\alpha}(x)=I_{a+}^{n-\alpha}f\in AC^n([a,b]) \tag{4}$$

бўлиши зарур ва етарли, бу ерда $n=[\mathrm{Re}\,\alpha]+1$, $I_{a+}^{\alpha}(L_1)-$ каср тартибли Риманн-Лиувилл интеграли кўринишини ифодаловчи жамланувчи (интегралланувчи) функциялар синфи,

$AC^n\left(\left[a,b\right]\right)-\left[a,b\right]$ кесмада $n-$ тартибли ҳосиласигача абсолют узлуксиз функциялар синфи ва

$$f_{n-\alpha}^{k}\left(a\right)=0,\ k=0,1,2,...,n-1. \tag{5}$$

Исбот. *Зарурийлиги.* $f=I_{a+}^{\alpha}\varphi,\quad \varphi\in L_1(a,b)$ бўлсин. (3) каср тартибли интегралларнинг ярим гуруҳ хоссаси $I_{a+}^{n-\alpha}f=I_{a+}^{n}\varphi,\quad \varphi\in L_1(a,b)$ ва (4), (5) шартларнинг бажарилиши Абел интеграл тенгламаси ечимининг мавжуд ва ягоналиги ҳақидаги леммага асосан келиб чиқади.

Етарлилиги. (3) ва (4) шартларининг бажарилишидан $f_{n-\alpha}\left(x\right)$ ни Абел интеграл тенгламаси ечимининг мавжуд ва ягоналиги ҳақидаги лемма [1] ёрдамида $f_{n-a}\left(x\right)=I_{a+}^{n}\varphi$ кўринишида ифодалаш мумкин, бу ерда $\varphi\in L_1(a,b)$. Демак, каср тартибли интегралларнинг ярим гуруҳ хоссасига кўра $I_{a+}^{n-\alpha}f=I_{a+}^{n}\varphi=I_{a+}^{n-\alpha}I_{a+}^{\alpha}\varphi$ бўлади. Бу ердан эса $I_{a+}^{n-\alpha}(f-I_{a+}^{\alpha}\varphi)=0$ эканлиги келиб чиқади. Абел типидаги тенглама ҳақидаги леммага [1] кўра $f-I_{a+}^{\alpha}\varphi=0$, чунки $\mathrm{Re}(n-\alpha)>0$. Теорема исботланди.

Ушбу теорема каср тартибли интегралларни ва каср тартибли ҳосилаларни ҳисоблашда анчагина қулайлик туғдиради. Буни билган ҳолда берилган (1) тенгламамизни интегро-дифференциал операторлар ёрдамида қуйидаги

$$I_{0+}^{c}\varphi\left(x\right)\equiv\int_{o}^{x}\frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma\left(c\right)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{x}{\tau}\right)\varphi\left(\tau\right)d\tau \tag{6}$$

кўринишини исботлаймиз. Келтирилган теорема ва ушбу

$$I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}f\left(x\right)=I_{a+}^{\beta}I_{a+}^{\alpha}f\left(x\right),\quad I_{a+}^{\beta}I_{a+}^{\alpha}f\left(x\right)=I_{a+}^{\alpha+\beta}f\left(x\right) \tag{7}$$

$$I_{b-}^{\alpha}I_{b-}^{\beta}f\left(x\right)=I_{b-}^{\beta}I_{b-}^{\alpha}f\left(x\right),\quad I_{b-}^{\beta}I_{b-}^{\alpha}f\left(x\right)=I_{b-}^{\alpha+\beta}f\left(x\right) \tag{8}$$

хоссалардан фойдаланиб, операторлар композициясини ҳосил қиламиз. (7) формулада $a=0$, (8) да эса $b=\infty$ алмаштиришлар бажарсак,

$$\begin{gathered} x^{a}I_{0+}^{\beta}x^{-\alpha-\beta}I_{0+}^{\alpha}x^{\beta}f\left(x\right)=I_{0+}^{\alpha}I_{0+}^{\beta}f\left(x\right)=I_{0+}^{\alpha+\beta}f\left(x\right),\\ x^{a}I_{-}^{\beta}x^{-\alpha-\beta}I_{-}^{\alpha}x^{\beta}f\left(x\right)=I_{-}^{\alpha}I_{-}^{\beta}f\left(x\right)=I_{-}^{\alpha+\beta}f\left(x\right). \end{gathered} \tag{9}$$

муносабатга эга бўламиз. Келтирилган маълумотлар асосида ушбу операторлар тенглиги келиб чиқади:

$$I_{0+}^{c}\varphi\left(x\right)=I_{0+}^{c-b}x^{-a}I_{0+}^{b}x^{a}\varphi\left(x\right),\ I_{0+}^{c}\varphi\left(x\right)=x^{a}I_{0+}^{b}x^{-a}I_{0+}^{c-b}\varphi\left(x\right). \tag{10}$$

Операторларнинг ёйилмасини қўйиб ва интеграллаш тартибини ўзгартириш ҳақидаги Дирихле формуласини қўлласак,

$$I_{0+}^{c-b}x^{-a}I_{0+}^{b}x^{a}\varphi\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma(c-b)}\int_{0}^{x}(x-\eta)^{c-b-1}\left(\eta^{-a}\,I_{0+}^{b\;a}\eta^{a}\,\varphi(\eta)\right)d\eta=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(c-b)}\int_{0}^{x}(x-\eta)^{c-b-1}\eta^{-a}d\eta\,\frac{1}{\Gamma(b)}\int_{0}^{\eta}(\eta-\tau)^{b-1}\tau^{a}\varphi(\tau)d\tau=\frac{1}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_{0}^{x}\tau^{a}\varphi(\tau)d\tau\times$$

$$\times\int_{\tau}^{x}\eta^{-a}(\eta-\tau)^{b-1}(x-\eta)^{c-b-1}d\eta$$

тенглик ҳосил бўлади. Ички интегралда $\eta=\tau+(x-\tau)\zeta$ алмаштириш бажариб, гипергеометрик функциянинг интеграл кўринишидан [2]

фойдаланамиз: $\int_{\tau}^{x}\eta^{-a}(\eta-\tau)^{b-1}(x-\eta)^{c-b-1}d\eta=(x-\tau)^{c-1}\tau^{-a}\int_{0}^{1}\zeta^{b-1}(1-\zeta)^{c-b-1}(1-\frac{\tau-x}{\tau}\zeta)^{-a}d\zeta=$

$$=\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}(x-\tau)^{c-1}\tau^{-a}\,{}_2F_1(a,b;c;1-\frac{x}{\tau})\cdot$$

Шундай қилиб,

$$I_{0+}^{c-b}x^{-a}I_{0+}^{b}x^{a}\varphi\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma(c)}\int\limits_0^x(x-\tau)^{c-1}\,{}_2F_1(a,b;c;1-\frac{x}{\tau})\varphi(\tau)d\tau\;I_{0+}^{c-b}x^{-a}I_{0+}^{b}x^{a}\varphi\left(x\right)=I_{0+}^{c}\varphi\left(x\right).$$

Агар (1) тенгламанинг ўнг томони — $g(x)$ функция қаралаётган оралиқда олинса,

$$\int\limits_0^x\frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma\left(c\right)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{x}{\tau}\right)\varphi\left(\tau\right)d\tau=g\left(x\right),\qquad I_{0+}^{c}\varphi\left(x\right)=g(x)$$

муносабатлар ўринли бўлиб,

$$\varphi\left(x\right)=x^{-a}I_{e+}^{-b}x^{a}I_{e+}^{b-c}g\left(x\right)\tag{11}$$

(1) тенгламанинг ечимига эга бўламиз.

Ушбу ечимнинг интеграл кўринишини келтириб чиқарамиз. Қидирилаётган интеграл кўринишни (11) ечим, (7), (8) операторлар ва шу каби композициялардан фойдаланиб келтириб чиқариш мумкин. Шу мақсадда (11) ечимни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\varphi\left(x\right)=x^{-a}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}x^{a}x^{-a}I_{e+}^{m-b}x^{a}I_{e+}^{(m-c)-(m-b)}g\left(x\right).$$

Бу ифодани (11) формулага қўйсак, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$I_{0+}^{c}\varphi\left(x\right)=x^{a}I_{e+}^{b}x^{-a}I_{e+}^{c-b}x^{-a}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}x^{a}x^{-a}I_{e+}^{m-b}x^{a}I_{e+}^{(m-c)-(m-b)}g\left(x\right),$$

$$\varphi\left(x\right)=x^{-a}{\frac{d}{dx^{m}}}^{m}\left\{x^{a}x^{-a}I_{e+}^{m-b}x^{a}I_{e+}^{(m-c)-(m-b)}g\left(x\right)\right\}=x^{-a}{\frac{d}{dx^{m}}}^{m}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_e^x\frac{(x-\eta)^{m-b-1}}{\Gamma\left(m-b\right)}\eta^{a}d\eta\int\limits_e^{\eta}\frac{(\eta-\tau)^{(m-c)-(m-b)-1}}{\Gamma\left(b-c\right)}g\left(\tau\right)d\tau\right\}$$

Ички интегралга Дирихле формуласини қўллаб ва алмаштириб бажарсак,

$$\int\limits_e^x\frac{g\left(\tau\right)d\tau}{\Gamma\left(m-b\right)\Gamma\left(b-c\right)}\int\limits_{\tau}^x\eta^{a}(x-\eta)^{m-b-1}(\eta-\tau)^{(m-c)-(m-b)-1}d\eta=$$

$$=x^{a}\left(x-\tau\right)^{m-c-1}\int\limits_0^1 s^{m-b-1}\left(1-s\right)^{(m-c)-(m-b)-1}\left(1-(1-\frac{\tau}{x})\right)^{a}ds$$

тенгликка эга бўламиз. Топилган ифодани ўрнига олиб бориб қўйсак, биз излаётган ечимнинг интеграл кўриниши ҳосил бўлади:

$$\varphi\left(x\right)=x^{-a}{\frac{d}{dx^{m}}}^{m}\left\{x^{a}\int\limits_e^x\frac{\left(x-\tau\right)^{m-c-1}}{\Gamma\left(m-c\right)}\,{}_2F_1\left(-a,m-b;m-c;1-\frac{\tau}{x}\right)g\left(\tau\right)d\tau\right\},\tag{12}$$

$$0<\operatorname{Re}c<m,\;\;g\in I_{e+}^{c}\left(L_{p,*}\left(e,d\right)\right).$$

Адабиётлар:

1. Самко С.Г., Кильбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – М.: Наука, 1987.
2. Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар. – Фарғона: “Фарғона” нашриёти, 2012.

(Тақризчи: А.Ўринов — физика-математика фанлари доктори, профессор).