ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

1-2021

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

Муассис: Фарғона давлат университети.

«FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ» журнали бир йилда олти марта чоп этилади.

Журнал филология, кимё ҳамда тарих фанлари бўйича Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрлар рўйхатига киритилган.

Журналдан мақола кўчириб босилганда, манба кўрсатилиши шарт.

Ўзбекистон Республикаси Президенти Администрацияси ҳузуридаги Ахборот ва оммавий коммуникациялар агентлиги томонидан 2020 йил 2 сентябрда 1109 рақами билан рўйхатга олинган.

Муқова дизайни ва оргинал макет ФарДУ таҳририят-нашриёт бўлимида тайёрланди.

Таҳририят манзили:
150100, Фарғона шаҳри, Мураббийлар кўчаси, 19-уй.
Тел.: (0373) 244-44-57. Мобил тел.: (+99891) 670-74-60
Сайт: www.fdu.uz

Босишга рухсат этилди:
Қоғоз бичими: - 60×84 1/8
Босма табоғи:
Офсет босма: Офсет қоғози.
Адади: 100 нусха
Буюртма №
ФарДУ нусха кўпайтириш бўлимида чоп этилди.
Манзил: 150100, Фарғона ш., Мураббийлар кўчаси, 19-уй.

Фарғона,
2021.

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

КИМЁ

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ТАРИХ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.946.6

КАПУТООПЕРАТОРИ ҚАТНАШГАН ТЎРТИНЧИ ТАРТИБЛИ АРАЛАШ ТИПДАГИ ТЕНГЛАМА УЧУН БИР НОЛОКАЛ МАСАЛА ҲАҚИДА

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ КАПУТО

ON A NONLOCAL PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER MIXED TYPE EQUATION WITH THE CAPUTO OPERATOR

Бахтиёр Жалилович Кадиркулов[1], Мухаммадали Абдумуталибович Жалилов[2]

[1]Бахтиёр Жалилович Кадиркулов – *Ташкентский государственный университет востоковедения, доцент, кафедры математики и информационных технологий доктор физико-математических наук (DSc).*

[2]Мухаммадали Абдумуталибович Жалилов – *ФерГУ, старший преподаватель кафедры методики начального образования.*

Аннотация

Мақолада Капуто маъносидаги каср ҳосилали тўртинчи тартибли аралаш турдаги тенглама учун нолокал масала ўрганилган. Ўзгарувчиларни ажратиш усули ёрдамида қаралаётган масала регуляр ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теорема исботланган. Масала ечимининг берилганларга узлуксиз боғлиқлиги кўрсатилган.

Аннотация

В статье для уравнений смешанного типа четвёртого порядка с дробной производной Капуто в прямоугольной области изучается нелокальная задача. С помощью метода разделения переменных доказывается теорема о единственности и существовании регулярного решения этой задачи. Доказано, что решение задачи является непрерывным с данными.

Annotation

This article explores the nonlocal problem for the quadratic fourth-order mixed-type equation in fractional derivative Kaputo. The theorem on the existence and uniqueness of a regular solution of a problem is proved by the method of separation of variables. Continuous dependence of the solution on the given data has been shown.

Таянч сўз ва иборалар: *аралаш типдаги тенглама, нолокал чегара масаласи, ечимнинг мавжудлиги ва ўзига хослиги, касрли интегрални ажратиш оператори, Капутооператори.*

Ключевые слова и выражения: *уравнение смешанного типа, нелокальная краевая задача, существование и единственность решения, оператор дифференцирования дробного интеграла, оператор Капуто.*

Keywords and expressions: *mixed type equation; nonlocal boundary value problem; the existence and a uniqueness of a solution, differentiation operator of fractional integral; operator Kaputo.*

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega = \{(x,t): 0 < x < 1, -a < t < b\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap (t > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (t < 0)$, где a и b – положительные действительные числа. В этой области для уравнения смешанного типа вида

$$0 = \begin{cases} \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + {}_C D_{0t}^{\alpha} u, \ t > 0, \\ \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

рассмотрим следующую нелокальную задачу.

Задача А. Требуется найти функцию $u(x,t)$, такую, что:

1) $u(x,t)$ принадлежит классу

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(\bar{\Omega}_1),\ \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(\bar{\Omega}_2),\ {}_C D_{0t}^{\alpha} u \in C(\Omega_1), u_{tt} \in C(\Omega_2), u_{xxxx} \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2), k = \overline{0,2}; \quad (2)$$

2) функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) в области $\Omega_1 \cup \Omega_2$;

3) функция $u(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, -a \le t \le b, \quad (3)$$

$$u_t(x,-a) = {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,b) + \varphi(x),\ 0 \le x \le 1, \quad (4)$$

4) функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям склеивания

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = \lim_{t\to-0} u(x,t),\ \lim_{t\to+0} {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = \lim_{t\to-0} u_t(x,t). \quad (5)$$

Здесь $\alpha = const \in (0,1)$, $\varphi(x)$ -заданная достаточно гладкая функции, ${}_C D_{0t}^{\alpha}$ -оператор интегро-дифференцирования дробного порядка в смысле Капуто, которая определяется следующим образом [1]:

$${}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau,\ t > 0.$$

Отметим, что по построению различных моделей задач теоретической физики с применением дробного исчисления изложены в работах [2], а более подробный обзор, посвящённый приложению дробного исчисления в прикладных задачах, приведен в работе [3].

Нелокальное условие типа (3) имеет место при моделировании задач обтекания профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной [4]. Исследование краевых задач для уравнения в частных производных высокого порядка обусловлено тем, что такие задачи возникают при моделировании явлений диффузии в физике твёрдых тел, при исследовании колебаний балок и пластин в механике [5].

Сначала при определенных условиях на a и b докажем единственность решения задачи N.

2. Существование, единственность и устойчивость решения задачи А.

Для решения задачи применим спектральный метод. Решения задачи А ищем в виде $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Подставляя это выражение в уравнение (1) и краевые условия (3), получим следующую спектральную задачу:

$$X^{IV}(x) - \lambda^4 X(x) = 0,\ X(0) = X(1) = X''(0) = X''(1) = 0.$$

Рассматриваемая задача самосопряженная, имеет полную в $L_2(0,1)$ систему собственных функций вида

$$X_n(x) = \sqrt{2}\sin\lambda_n x, \quad (6)$$

которая образует базис в $L_2(0,1)$. Здесь $\lambda_n = \pi n, n \in N$.

2.1. Единственность решения задачи А.

Пусть $u(x,t)$ решение задачи А. Рассмотрим следующие функции

$$u_n^+(t) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_n x dx, n = 1,2,..., \quad (7)$$

$$u_n^-(t) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_n x dx, n = 1,2,... \quad (8)$$

Применяя оператор ${}_C D_{0t}^{\alpha}$ к обеим частям равенства (7) по t и дифференцируя (8) по t два раза, учитывая уравнение (1), получим следующие дифференциальные уравнения относительно функций $u_n^{\pm}(t)$:

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} u_n^{+}(t) + \lambda_n^4 u_n^{+}(t) = 0, t > 0 , \tag{9} $$

$$ \frac{d^2}{dt^2} u_n^{-}(t) + \lambda_n^4 u_n^{-}(t) = 0, t < 0 . \tag{10} $$

Общие решения уравнений (9) и (10) соответственно

$$ u_n^{\pm}(t) = \begin{cases} A_n E_{\alpha}(-\lambda_n^4 t^{\alpha}), t > 0, \\ B_n \sin \lambda_n^2 t + L_n \cos \lambda_n^2 t, t < 0, \end{cases} \tag{11} $$

где $A_n, B_n, L_n, n = 1,2,...$ - произвольные постоянные.

Из (7), (8), учитывая условия (4) и (5) получим, что функции $u_n^{\pm}(t)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$ \lim_{t\to+0} u_n(t) = u_n(t), \lim_{t\to+0} {}_C D_{0t}^{\alpha} u_n(t) = \lim_{t\to-0} \frac{du_n(t)}{dt}, \tag{12} $$

$$ \frac{du_n^{-}(-a)}{dt} = {}_C D_{0t}^{\alpha} u_n^{+}(b) + \varphi_n , \tag{13} $$

где

$$ \varphi_n = \sqrt{2} \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_n x dx, n = 1,2,... . $$

Далее, удовлетворяя функции (11) условиям (12)-(13) для нахождения постоянных A_n, B_n, L_n получим систему уравнений вида

$$ \begin{cases} A_n = L_n, B_n = -\lambda_n^2 A_n, \\ L_n \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 a + B_n \lambda_n^2 \cos \lambda_n^2 a + \lambda_n^4 A_n E_{\alpha}(-\lambda_n^4 b^{\alpha}) = \varphi_n. \end{cases} \tag{14} $$

Данная система имеет единственное решение вида

$$ L_n = A_n, B_n = -\lambda_n^2 A_n, A_n = \frac{\varphi_n}{\lambda_n^2 \Delta_n(a,b)} , \tag{15} $$

при условии, что при всех $n \in N$ имеет место

$$ \Delta_n(a,b) = \sin \lambda_n^2 a - \lambda_n^2 \cos \lambda_n^2 a + \lambda_n^2 E_{\alpha}(-\lambda_n^4 b^{\alpha}) \neq 0 . \tag{16} $$

Подставляя (15) в (11), окончательно получим

$$ u_n^{\pm}(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_n}{\lambda_n^2 \Delta_n(a,b)} E_{\alpha}(-\lambda_n^4 t^{\alpha}), t > 0, \\ \dfrac{\varphi_n}{\lambda_n^2 \Delta_n(a,b)} \left(\cos \lambda_n^2 t - \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 t \right), t \le 0. \end{cases} \tag{17} $$

С помощью (17) легко доказать единственность решения задачи А. Действительно, пусть выполнено условие (16) и $\varphi(x) \equiv 0$. Тогда $\varphi_n = 0$, и из формул (7), (8) и (17) следует, что

$$ \int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_n x dx = 0, t \in [-a,b], n = 1,2,... . $$

Далее, учитывая полноту системы (6) в пространстве $L_2(0,1)$ заключаем, что $u(x,t)=0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $t\in[-a,b]$. Поскольку $u(x,t)\in C(\overline{\Omega}_1), u(x,t)\in C(\overline{\Omega}_2)$, то $u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Если существует решение задачи А, то оно единственно только и только тогда, когда выполнены условия (16) при всех $n\in N$.

Теперь рассмотрим случай, когда нарушается условие (16). Пусть $\Delta_m(a,b)=0$ при некоторых $a,b\in(0,1]$ и $n=m$. Тогда однородная задача А (где $\varphi(x)\equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$V_m^{\pm}(x,t)=\sqrt{2}v_m^{\pm}(t)\sin\lambda_m x, \qquad (18)$$

$$v_m^{\pm}(t)=\begin{cases} E_\alpha(-\lambda_n^4 t^\alpha), t>0, \\ \cos\lambda_m^2 t-\lambda_m^2\sin\lambda_m^2 t, t<0. \end{cases}$$

Теперь, выражение $\Delta_n(a,b)$ представим в виде:

$$\Delta_n(a,b)=\sqrt{1+\lambda_n^4}\sin\left(\lambda_n^2 a-\rho_n\right)+\lambda_n^2 E_\alpha(-\lambda_n^4 b^\alpha), \qquad (19)$$

где $\rho_n=\arcsin\left(\lambda_n^2/\sqrt{1+\lambda_n^4}\right)$ и $\rho_n\to\frac{\pi}{2}$ при $n\to+\infty$. Отсюда видно, что выражение $\Delta_n(a,b)$ обращается в нуль только в том случае, когда

$$a=\frac{1}{\lambda_n^2}\left[(-1)^k\arcsin\frac{\lambda_n^2 E_\alpha(-\lambda_n^4 b^\alpha)}{\sqrt{1+\lambda_n^4}}+\pi k+\rho_n\right], n=1,2,\ldots$$

Поскольку $\Delta_n(a,b)$ является знаменателем дроби, то при достаточно больших *n* выражение $\Delta_n(a,b)$ может стать достаточно малым, т. е. возникает проблема "малых знаменателей". Поэтому для обоснования существования решения данной задачи необходимо показать существование чисел a и b таких, что при достаточно больших *n* выражение $\Delta_n(a,b)$ отделено от нуля.

Лемма 2. Пусть *b* - любое положительное действительное число, *a* – иррациональное число, такое, что либо $a\pi\in N$, либо $\pi a=\frac{p}{q}\in Q\setminus N$ где $p,q\in N,(p,q)=1$. Тогда при больших n существует положительная постоянная B_0 такая, что справедлива оценка

$$\left|\Delta_n(a,b)\right|\ge B_0 n^2>0. \qquad (20)$$

Отметим, что идея доказательства леммы 2 заимствована из работы [4].

2.2. Существование решения задачи А.

Переходим к доказательству существования решения задачи А. Из (18), (20) легко следует доказательство следующей леммы:

Лемма 3. Пусть выполнены условия (18) и (20). Тогда имеет место

1) если $t\in[0,b]$, то

$$\left|u_n^+(t)\right|\le\frac{B_3}{n^4}|\varphi_n|, \quad \left|{}_C D_{0t}^\alpha u_n^+(t)\right|\le B_4|\varphi_n|,$$

2) если $t\in[-a,0]$, тогда

$$\left|u_n^-(t)\right|\le\frac{B_5}{n^2}|\varphi_n|, \left|\frac{du_n^-(t)}{dt}\right|\le B_6|\varphi_n|, \left|\frac{d^2u_n^-(t)}{dt^2}\right|\le B_7 n^2|\varphi_n|,$$

где $B_k, k=\overline{1,7}$ - здесь и далее положительные постоянные.

Так как система (6) полна и образует базис в $L_2(0,1)$, то решение задачи А в Ω ищем в виде

$$u(x,t)=\begin{cases}\sqrt{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^{+}(t)\sin\lambda_n x,\ (x,t)\in\Omega_1,\\ \sqrt{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^{-}(t)\sin\lambda_n x,\ (x,t)\in\Omega_2,\end{cases} \tag{21}$$

где $u_n^{\pm}(t)$ - неизвестные функции.

Нетрудно видеть, что подставляя функцию (21) в (1) и удовлетворяя условиям (3)-(5) относительно искомых функций получим задачу (9), (10), (12)-(13) решение которой имеет вид (17).

Таким образом, решения задачи можно представить в виде (21), где $u_n^{\pm}(t)$ определяются по формулам (17). Теперь, остаётся доказать правомерность всех этих действий. Для этого, формально из (21), почленным дифференцированием составим ряды

$${}_C D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}{}_C D_{0t}^{\alpha}u_n^{+}(t)X_n(x), t>0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{+}(t)\frac{d^k X_n(x)}{dx^k},\ k=\overline{1,4}, t>0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2 u_n^{-}(t)}{dt^2}X_n(x), t<0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{-}(t)\frac{d^k X_n(x)}{dx^k},\ k=\overline{1,4}, t<0. \tag{25}$$

Учитывая леммы 2,3 нетрудно видеть, что ряды (24), (25) и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_C D_{0t}^{\alpha}u_n^{+}(t)X_n(x),\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n^{+}(t)\frac{d^k X_n(x)}{dx^k}, k=\overline{0,4}\ t>0, \tag{26}$$

которые получаются из (22) и (23) почленным, мажорируется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2|\varphi_n|, \tag{27}$$

и поэтому исследуем сходимость ряда (27). Учитывая соотношение

$$\varphi_n=\frac{1}{(\pi n)^3}\varphi_n^{(3)}=-\frac{\sqrt{2}}{(\pi n)^3}\int_0^1\varphi'''(x)\cos\lambda_n x dx,$$

а также применяя неравенство Коши-Шварца и Бесселя имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2|\varphi_n|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\varphi_n^{(3)}|\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(3)}|^2\right)^{1/2}\le C\left\|\varphi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)},$$

где $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Тогда по теореме Вейерштрасса ряды (24)-(26) сходятся соответственно в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ абсолютно и равномерно.

Отсюда и следует, что функция $u(x,t)$, определенная рядом (24), принадлежит классу (2), а также удовлетворяет условиям (3)-(5).

Пусть теперь $\Delta_n(a,b)=0$ при некоторых a и $n=k_1,...,k_s$, $1\le k_1<k_1<...<k_s, s\in N$. Тогда для разрешимости системы (14) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\varphi_n = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\sin\lambda_n x dx = 0, n = k_1,...k_s \cdot \qquad (28)$$

В этом случае решение задачи определяется в виде суммы рядов

$$u(x,t) = \sqrt{2}\left[\sum_{n=1}^{k_1-1} + \sum_{n=k_1+1}^{k_2-1} + ... + \sum_{n=k_s+1}^{\infty} + \right] u_n^{\pm}(t)\sin\lambda_n x + \sum_m C_m V_m^{\pm}(t), \qquad (29)$$

где в последней сумме $m = k_1,...k_s$, C_m - произвольные постоянные, функции $V_m^{\pm}(t)$, определяются из формулы (18).

Таким образом, имеет место:

Теорема 2. Пусть $\varphi(x) \in C^2[0,1], \varphi^{(3)}(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi^{(2k)}(0) = \varphi^{(2k)}(1) = 0$, $k = \overline{0,1}$. Тогда задача А в области Ω однозначно разрешима только тогда, когда выполняются условия (16) и (20) и решение определяется рядом (21). Если $\Delta_n(a,b) = 0$ при некоторых a,b и $n = k_1,...,k_s$ и выполнено условие (20), то задача А разрешима только тогда, когда выполняются условия ортогональности (28). При этом решение определяется рядом (29).

Литература:

1. Cilbas A.A., Sirivastava H.M., Turijilo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics studies, 204. Elsevier Science B. M., Amsterdam, 2006. xvi +523pp.

2. V.E.Tarasov. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Publisher Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG, Publication City/Country Berlin, Germany. 2011,

3. Васильев В.В., Симак Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное издание. - Киев, НАН Украины, 2008. - 256 с. ISBN 978-966-02-4384-2

4. Юнусова Г.Р. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа , Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия. 2011. № 8(89).

5. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985.

6. Sabitov K.B. Nonlocal Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation in a Rectangular Domain. Mathematical Notes, 2011, Vol. 89, No. 4, pp.

7. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. -М., 1966.

8. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2014.

(Тақризчи: А.Ўринов – физика-математика фанлари доктори, профессор).